Filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

- (P_0) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (P_1) $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- (P_2) $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) : \quad X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
- (P_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Première Partie

1. Que dire d'une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifierait (P_2) mais pas (P_3) ? [S]
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
   A quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ? [S]
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E alors E appartient à $\mathcal{F}$. [S]
4. Pour toute partie non vide A de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. On l'appelle le *filtre principal* engendré par A. [S]
5. On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E.
   Montrer que l'application φ de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans $\mathcal{F}(E)$ définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ est injective. [S]
6. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble infini.
   On note $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   Montrer que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E. [S]

Deuxième Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On suppose que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie *finie* de E.
   L'objectif de cette question est de démontrer que le filtre $\mathcal{F}$ est principal.
   Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists B \in \mathcal{F}, \mathrm{card}(B) = n\}$ est donc non vide.
   Soit n_0 le minimum de l'ensemble $\mathcal{N}$, et soit A un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal n_0.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est le filtre principal engendré par A. [S]
2. (a) En déduire que si E est un ensemble fini, tout filtre sur E est principal. [S]
   (b) Qu'en déduit-on, si E est fini, pour l'application φ définie en I-5 ? [S]
   (c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à n éléments (avec $n \geq 1$) ?
   Donner quelques exemples de filtres sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. [S]
3. Soit E un ensemble infini. Prouver que $\mathcal{I}_E$ n'est pas un filtre principal. [S]

Troisième Partie

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F},\ X \cap B = Y \cap B$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. Soit A une partie non vide de E. On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
   Montrer qu'alors : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$. [S]
3. On suppose que E est infini et que $\mathcal{F}$ est le filtre $\mathcal{I}_E$.
   Δ désigne l'opération différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
   Montrer que : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est un ensemble fini. [S]

Quatrième Partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion".

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on pose $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

NB : on pourra indifféremment utiliser le symbole $\leq$ ou le symbole $\subset$.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ de E est un *ultrafiltre* si : $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E),\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toutes parties A, B non vides de E : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. [S]
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément minimum ? Si oui lequel ? [S]
   (b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément maximum ? Si oui lequel ? [S]
3. (a) Soit $\mathcal{F}_A$ le filtre engendré par une partie A non vide de E.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton $\{x\}$.
   On dit que les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*. [S]
   (b) Quels sont les ultrafiltres sur E si l'ensemble E est fini ? [S]
4. On rappelle que pour toute partie A de E, $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.
   Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F})$$
   [S]
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F})$$
   [S]
6. (a) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est inclus dans aucun ultrafiltre trivial. [S]

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (P_1) mais pas (P_2).
   Puisque l'ensemble vide appartient à $\mathcal{F}$, et puisque toute partie X de E contient $\emptyset$, de l'hypothèse (P_2) il découle que X est élément de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. [Q]
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E car il ne vérifie pas l'hyptohèse (P_3).
   Si E est réduit à un singleton $\{x\}$, alors $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre sur E.
   Mais si E contient au moins deux éléments distincts x et y, alors les singletons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ sont éléments de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, mais pas leur intersection (qui est vide).
   Ainsi $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton. [Q]
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$, soit A un élément de $\mathcal{F}$.
   L'inclusion $A \subset E$ et l'hypothèse (P_2) impliquent que E est élément de $\mathcal{F}$. [Q]
4. Tout d'abord $\mathcal{F}_A$ est non vide car l'ensemble A est lui-même un élément de $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, soient X et Y deux éléments de $\mathcal{F}_A$, c'est-à-dire deux parties de E contenant A.
   On a bien sûr $A \subset X \cap Y$, ce qui prouve que $X \cap Y$ appartient à $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, si $X \in \mathcal{F}_A$ et si $Y \subset E$ contient X, on a $A \subset X \subset Y$ donc $Y \in \mathcal{F}_A$.
   Enfin, A étant non vide, l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{F}_A$ ($A \not\subset \emptyset$).
   On a établi les propriétés (P_0), (P_1), (P_2), (P_3) : $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. [Q]
5. On se donne deux parties non vides A et B de E telles que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$.
   Il s'agit donc de prouver l'égalité $A = B$.
   On sait que A est toujours élément de $\mathcal{F}_A$. On en déduit ici $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire $B \subset A$.
   Les deux ensembles A et B jouant le même rôle, il en découle $B \subset A$ puis $A = B$. [Q]
6. – Tout d'abord E est élément de $\mathcal{I}_E$, car il est le complémentaire de l'ensemble vide, qui est une partie finie de E. Donc $\mathcal{I}_E$ est non vide : la propriété (P_0) est vérifiée.
   – Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{I}_E$: cela signifie que les complémentaires $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de X et Y sont des parties finies de E.
     Il en est donc de même de l'ensemble $\overline{X} \cup \overline{Y}$, qui est le complémentaire de $X \cap Y$.
     Ainsi $X \cap Y$ est élément de $\mathcal{I}_E$, ce qui établit la propriété (P_1).
   – Soit X un élément de $\mathcal{I}_E$ et soit Y une partie de E contenant X.
     Le complémentaire $\overline{Y}$ est donc contenu dans celui de X, qui par hypothèse est fini.
     Il en découle que $\overline{Y}$ est fini, donc que Y est dans $\mathcal{I}_E$: cela établit (P_2).
   – Enfin l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{I}_E$ car son complémentaire E est infini.
     Cela établit (P_3) et achève de prouver que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E.

   [Q]

Deuxième Partie

1. Puisque A est un élément de $\mathcal{F}$, toute partie de E qui contient A est élément de $\mathcal{F}$.
   Autrement dit, le filtre principal $\mathcal{F}_A$ est inclus dans le filtre $\mathcal{F}$.
   Réciproquement, soit B un élément de $\mathcal{F}$.
   Il reste à montrer que B contient A.
   Grâce à la propriété (P_1), on sait que $C = A \cap B$ est un élément de $\mathcal{F}$.
   L'ensemble C est inclus dans A : il est donc fini et $\text{card}(C) \leq \text{card}(A)$.
   Or $\text{card}(A)$ est le cardinal minimum des parties finies de E qui sont éléments de $\mathcal{F}$.
   Il en découle $\text{card}(C) = \text{card}(A)$, puis $C = A$ car on connait déjà l'inclusion $C \subset A$.
   L'égalité $C = A$ signifie que B contient A, donc que B est dans $\mathcal{F}_A$.
   Ainsi $\mathcal{F}$ est égal au filtre principal $\mathcal{F}_A$ engendré par A. [Q]
2. (a) C'est évident puisque tout filtre $\mathcal{F}$ sur E est non vide : n'importe lequel des éléments A de $\mathcal{F}$ est une partie finie de E, ce qui ramène à la question précédente. [Q]
   (b) Le fait que tout filtre de E s'écrive $\mathcal{F}_A$, où A est une partie non vide de E, prouve que l'application φ est surjective.
   Comme on sait déjà qu'elle est injective, on en déduit qu'elle est bijective. [Q]
   (c) Puisque φ est bijective, il y a autant de filtres sur E qu'il y a de parties non vides dans E, c'est-à-dire $2^n - 1$.
   Sur $E = \{a, b, c, d\}$, il y a $2^4 - 1 = 15$ filtres, et notamment :
   - Le filtre principal engendré par $\{a\}$:
     Il est égal à $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
   - Le filtre principal engendré par $\{a, b\}$:
     Il est égal à $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
   - Le filtre principal engendré par $\{a, b, c\}$: il est égal à $\{\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.
   - Le filtre principal engendré par $\{a, b, c, d\}$: il est égal à $\{\{a, b, c, d\}\}$.

   [Q]
3. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{I}_E$ soit un filtre principal, et donc qu'il s'écrive $\mathcal{F}_A$, où A une partie non vide de E.
   A étant un élément de $\mathcal{F}_A$ donc de $\mathcal{I}_E$, le complémentaire $\overline{A}$ est une partie finie de E.
   Soit a un élément de A, et $B = A \setminus \{a\}$.
   B est un élément de $\mathcal{I}_E$ car son complémentaire $\overline{B} = \overline{A} \cup \{a\}$ est une partie finie de E.
   Pourtant B n'est pas un élément de $\mathcal{F}_A$, car $A \subsetneq B$.
   On aboutit ainsi à une contradiction : le filtre $\mathcal{I}_E$ n'est donc pas principal. [Q]

Troisième Partie

1. – *Réfexivité*

   Soit X une partie quelconque de E. Puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$ on choisit un élément B de $\mathcal{F}$. On a évidemment l'égalité $B \cap X = B \cap X$, ce qui assure $X\mathcal{R}X$.

   – *Symétrie*

   Dans la définition de $X\mathcal{R}Y$, X et Y jouent un rôle symétrique. Donc $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$.

   – *Transitivité*

   Soient X, Y, Z trois parties de E. On suppose que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$.
   Il existe donc deux éléments B et C de $\mathcal{F}$ tels que : $\begin{cases} X \cap B = Y \cap B \\ Y \cap C = Z \cap C \end{cases}$
   Mais $\mathcal{F}$ est un filtre. L'ensemble $D = B \cap C$ est donc un élément $\mathcal{F}$.
   On a alors $(X \cap B) \cap D = (Y \cap B) \cap D$ c'est-à-dire $X \cap D = Y \cap D$.
   De même, $(Y \cap C) \cap D = (Z \cap C) \cap D$ c'est-à-dire $Y \cap D = Z \cap D$.
   On en déduit $X \cap D = Z \cap D$, ce qui assure $A\mathcal{R}Z$ car D est élément de $\mathcal{F}$.

   Conclusion : $\mathcal{R}$ étant réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence. [Q]

2. – Si $X \cap A = Y \cap A$, alors $X\mathcal{R}Y$, car A est un élément particulier de $\mathcal{F}_A$.

   – Réciproquement, supposons qu'il existe B dans $\mathcal{F}_A$ tel que $X \cap B = Y \cap B$.
   Par définition de $\mathcal{F}_A$, on a l'inclusion $A \subset B$.
   On en déduit $(X \cap B) \cap A = (Y \cap B) \cap A$ c'est-à-dire $X \cap A = Y \cap A$.

   Quand $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$, on a donc prouvé l'équivalence : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$. [Q]

3. – Soient X et Y deux parties de E telles que $X\mathcal{R}Y$.
   Il existe donc une partie A de E, de complémentaire fini, telle que $A \cap X = A \cap Y$.
   Si on note $Z = A \cap X = A \cap Y$, on a :

$$\begin{cases} Z = (A \cap X) \cup (A \cap Y) = A \cap (X \cup Y) \\ Z = (A \cap X) \cap (A \cap Y) = A \cap (X \cap Y) \end{cases}$$

   On en déduit $(X\Delta Y) \cap A = (X \cup Y) \cap (\overline{X \cap Y}) \cap A = A \cap (X \cap Y) \cap (\overline{X \cap Y}) = \emptyset$.
   Ainsi $X\Delta Y = (X\Delta Y) \cap (A \cup \overline{A}) = (X\Delta Y) \cap \overline{A}$.
   L'ensemble $X\Delta Y$, partie de l'ensemble fini $\overline{A}$, est donc lui-même fini.

   – Réciproquement, soient X et Y deux parties de E telles que $Z = X\Delta Y$ soit finie.
   L'ensemble $A = \overline{Z}$ est donc un élément de $\mathcal{I}_E$.
   Vérifions l'égalité $A \cap X = A \cap Y$.
   Effectivement, on a :

$$A \cap X = \Big((\overline{X \cup Y}) \cup (X \cap Y)\Big) \cap X = X \cap Y \text{ et } A \cap Y = X \cap Y$$

   Ainsi les parties X et Y sont en relation par $\mathcal{R}$.
   On a donc prouvé l'équivalence : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est fini.
   [Q]

Quatrième Partie

1. Soient A et B deux parties non vides de E.
   - On sait que B est un élément particulier de $\mathcal{F}_B$.
     On en déduit que si $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$ alors B appartient à $\mathcal{F}_A$ donc contient A.
   - Réciproquement, si $A \subset B$ alors tout élément de $\mathcal{F}_B$, c'est-à-dire toute partie de E contenant B, contient A également, c'est-à-dire est un élément de $\mathcal{F}_A$.

   Conclusion : pour toutes parties A, B non vides de E, on a : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. [Q]
2. (a) Le filtre $\mathcal{F}_E$ (engendré par E) qui se réduit au singleton $\{E\}$ est le minimum de l'ensemble $\mathcal{F}(E)$. En effet, pour tout filtre $\mathcal{G}$ sur E, on a $E \in \mathcal{G}$.
   On en déduit $\{E\} \subset \mathcal{G}$, ou encore $\mathcal{F}_E \leq \mathcal{G}$. [Q]

   (b) – Si E est réduit à un singleton $\{a\}$, le seul filtre sur E est $\mathcal{P}(E) \setminus \emptyset = \{\{a\}\}$, qui est bien sûr élément maximum de $\mathcal{F}(E)$ (puisqu'il est tout seul).

   – Supposons maintenant que E contienne au moins deux éléments distincts a et b.
   S'il existait un maximum $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}(E)$, il majorerait les filtres $\mathcal{F}_{\{a\}}$ et $\mathcal{F}_{\{b\}}$.
   Le singleton $\{a\}$ (qui est élément de $\mathcal{F}_{\{a\}}$) serait donc élément de $\mathcal{F}$.
   On en déduirait de même $\{b\} \in \mathcal{F}$, et donc $\{a\} \cap \{b\} \in \mathcal{F}$.
   Mais ceci est absurde car $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$.

   Conclusion : $\mathcal{F}(E)$ n'a pas de maximum, sauf si E est réduit à un singleton. [Q]
3. (a) – Soit x un élément de E, et $\mathcal{G}$ un filtre contenant le filtre principal $\mathcal{F}_{\{x\}}$.
   Supposons que cette inclusion soit stricte. Alors il existe une partie Y de E qui est dans $\mathcal{G}$ mais pas dans $\mathcal{F}_{\{x\}}$ (donc qui ne contient pas le singleton $\{x\}$.)
   Or le singleton $\{x\}$ est élément de $\mathcal{F}_{\{x\}}$ donc de $\mathcal{G}$.
   Ainsi $\{x\} \cap Y$ est élément de $\mathcal{G}$ ce qui est absurde car cette intersection est vide.
   On a donc l'égalité $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\{x\}}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_{\{x\}}$ est un ultrafiltre.

   – Réciproquement soit A une partie non vide de E.
   On suppose que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre sur E. Soit a un élément de A.
   On a l'inclusion $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_{\{a\}}$ car $\{a\} \subset A$.
   Puisque $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre, on en déduit $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{\{a\}}$.
   Cette égalité implique $A = \{a\}$: A est donc réduit à un singleton.

   – Conclusion : un filtre principal $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre$\Leftrightarrow$ A est un singleton.
   [Q]

   (b) Si l'ensemble E est fini, on sait que tous les filtres sur E sont principaux.
   Mais un filtre principal $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton.
   Conclusion : si E est fini, les ultrafiltres sont les $\mathcal{F}_{\{x\}}$, pour tout élément x de E. [Q]
4. – Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E. Soit A une partie de E, n'appartenant pas à $\mathcal{F}$.
   Il s'agit de démontrer que $\overline{A}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
   Pour cela on définit l'ensemble $\mathcal{G} = \{X \subset E, A \cup X \in \mathcal{F}\}$.
   Montrons que $\mathcal{G}$ est un filtre sur E, et qu'il contient $\mathcal{F}$.

- ◇ $\mathcal{G}$ est une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.
  En effet, $E \in \mathcal{G}$ car $A \cup E = E$ est élément de $\mathcal{F}$.
- ◇ Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{G}$, alors il en est de même de $X \cap Y$ car $A \cup (X \cap Y)$ est l'intersection de $A \cup X$ et de $A \cup Y$, tous deux éléments de $\mathcal{F}$.
- ◇ Soit X un élément de $\mathcal{G}$ et soit Y une partie de E contenant X.
  On a l'inclusion $A \cup X \subset A \cup Y$ et $A \cup X$ est par hypothèse un élément de $\mathcal{F}$.
  On en déduit que $A \cup Y$ est élément de $\mathcal{F}$, donc que Y est élément de $\mathcal{G}$.
- ◇ Enfin $\emptyset$ n'est pas élément de $\mathcal{G}$ car $A \cup \emptyset = A$ n'est pas élément de $\mathcal{F}$.
- ◇ A ce stade, on sait donc que $\mathcal{G}$ est un filtre sur E.
  Pour tout élément X de $\mathcal{F}$, $A \cup X$ contient X et est donc un élément de $\mathcal{F}$.
  On en déduit que X est un élément de $\mathcal{G}$.
  Il en résulte l'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Or $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre. On en déduit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
  Enfin $\overline{A}$ est un élément de $\mathcal{G}$ car $A \cup \overline{A} = E$ est un élément de $\mathcal{F}$.
  Ainsi $\overline{A}$ est un élément de $\mathcal{F}$, ce qu'il fallait démontrer.

– Réciproquement, Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E tel que : $\forall\, A \subset E, A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
  On suppose par l'absurde que $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
  Il existe donc un filtre $\mathcal{G}$ sur E contenant strictement $\mathcal{F}$.
  Ainsi il existe un élément A de $\mathcal{G}$, qui n'est pas dans $\mathcal{F}$.
  Mais si A n'est dans $\mathcal{F}$, alors $\overline{A}$ est dans $\mathcal{F}$ donc dans $\mathcal{G}$.
  On en déduit que $\emptyset = A \cap \overline{A}$ est un élément de $\mathcal{G}$ ce qui n'est pas.
  On a donc prouvé que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur E. Ceci achève la démonstration.

[Q]

5. – Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E.
  Soient A, B deux parties de E telles que $A \cup B$ appartienne à $\mathcal{F}$.
  Supposons par l'absurde que ni A ni B n'appartiennent à $\mathcal{F}$.
  D'après la question précédente, on en déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des éléments de $\mathcal{F}$.
  Il en est donc de même de leur intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$ c'est-à-dire de $\overline{A \cup B}$.
  Alors $\emptyset = (A \cup B) \cap (\overline{A \cup B})$ serait élément de $\mathcal{F}$, ce qui est impossible.
  On a donc démontré l'implication $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

   – Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E.
  On suppose que pour toutes parties A, B de E, on a $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.
  Soit A une partie quelconque de E. La réunion $E = A \cup \overline{A}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
  De l'hypothèse il découle que A est dans $\mathcal{F}$ ou que $\overline{A}$ est dans $\mathcal{F}$.
  D'après la question précédente, on sait que cela implique que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

   [Q]

6. (a) Soit A l'ensemble des entiers pairs de $\mathbb{N}$.
   Les ensembles A et $\overline{A}$ sont tous les deux de complémentaire infini.
   Aucun de ces deux ensembles n'est donc élément de $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$.

D'après la question 4, cela suffit à prouver que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre. [Q]

(b) Soit $\mathcal{F}_{\{n\}}$ un ultrafiltre trivial sur $\mathbb{N}$, où n est un entier naturel quelconque.
$A = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ est un élément de $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ car son complémentaire $\{n\}$ est fini.
Mais ce n'est pas un élément de $\mathcal{F}_{\{n\}}$ car $\{n\}$ n'est pas inclus dans A.
Ainsi on n'a pas l'inclusion $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{\{n\}}$.
Le filtre $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est donc inclus dans aucun ultrafiltre trivial de $\mathbb{N}$. [Q]