Quatre exercices indépendants

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : vers l'opération ensembliste unique ?

Soit E un ensemble non vide. Le complémentaire dans E de toute partie A de E est noté $\overline{A}$.

Dans $\mathcal{P}(E)$, on connait les opérations $\cap$ (intersection), $\cup$ (réunion), $\setminus$ (soustraction ensembliste), Δ (différence symétrique), et l'opération "passage au complémentaire". Dans la suite de cet exercice, elles seront appelées *opérations usuelles*.

On appelera *expression ensembliste* toute expression formée à l'aide d'un nombre fini de parties de E combinées entre elles au moyen d'opérations usuelles.

Par exemple, si A, B, C sont des parties de E, voici quelques expressions ensemblistes :

$$\emptyset, \quad E, \quad A, \quad A \cup B, \quad (A \Delta C) \setminus (\overline{A} \cap B), \quad \text{etc.}$$

On dira par exemple que A, B, C sont les "symboles" de l'expression $(A \Delta C) \setminus (\overline{A} \cap B)$.

Dans un souci d'économie, on étudie s'il est possible de réécrire toute expression ensembliste à l'aide de certaines seulement des opérations usuelles (question 1), voire d'une seule d'entre elles (question 2, quitte à utiliser un symbole qui n'était pas dans l'expression initiale), ou éventuellement à l'aide d'une seule opération bien choisie (question 3, cette fois-ci sans utiliser d'autres symboles que ceux qui apparaissaient dans l'expression initiale).

1. Montrer que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement l'intersection et le passage au complémentaire.
2. Montrer que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement la différence ensembliste (au prix éventuel de l'utilisation d'un symbole supplémentaire.)
3. On définit une opération notée ∇ en posant :

$$\forall (X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3, \ \nabla(X, Y, Z) = \left(\overline{X} \cap Y \cap Z\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(\overline{Y} \cap \overline{Z}\right)$$

   (a) Montrer que dans $\mathcal{P}(E)$ le "passage au complémentaire" peut s'exprimer au moyen de l'opération ∇, sans utilisation de symbole supplémentaire.

   (b) Montrer qu'il en est de même pour l'opération "intersection".

   (c) En déduire que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement l'opération ∇ et sans utiliser d'autres symboles que ceux qui figuraient au départ dans cette expression.

Exercice 2 : Propriétés caractéristiques de certaines sommes d'entiers

1. Rappeler pourquoi, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.
2. Réciproquement, on se donne une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de réels strictement positifs.

   On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$.

   Montrer que pour tout entier k on a $x_k = k$.
3. Soit p un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

   On suppose que pour $n \geq 1$, S_n est un carré (c'est le cas si $p = 3 \ldots$)

   Montrer que l'entier p est nécessairement égal à 3.

Exercice 3 : étude d'une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$.
L'objectif de cet exercice est de prouver que les deux seules possibilités (qui par ailleurs conviennnent de façon évidente) sont :

- L'application nulle, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 0$.
- L'application identité, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Dans la suite de l'exercice, on note a l'entier naturel $f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que pour n de $\mathbb{N}$, on a $f(n^2) = f(n)^2$.
2. Montrer alors que $a^2 = a$, donc que a est égal à 0 ou à 1.

   Pour répondre à la question posée, il suffit visiblement de prouver que l'égalité $f(n) = an$, déjà vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, est vraie pour tout entier naturel n.
3. Vérifier successivement les égalités $f(2) = 2a$, $f(4) = 4a$, et $f(5) = 5a$.
4. Utiliser les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(3) = 3a$.
5. Utiliser les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(7) = 7a$.
6. Montrer que $f(8) = 8a$, $f(9) = 9a$, $f(10) = 10a$ et $f(6) = 6a$.
7. Observer que pour tout entier m on a $\begin{cases} (2m)^2 + (m-5)^2 = (2m-4)^2 + (m+3)^2 \\ (2m+1)^2 + (m-2)^2 = (2m-1)^2 + (m+2)^2 \end{cases}$

   Montrer que pour n, on a $f(n) = an$.
8. Conclusion ?

Exercice 4 : théorème de Cantor-Bernstein

Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. On veut prouver qu'il existe une bijection h de E sur F.

On note $\varphi = g \circ f$: cette application est donc injective de E dans lui-même.

Soit $\overline{g(F)}$ le complémentaire de $g(F)$ dans E, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ne sont l'image par g d'aucun élément de F. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties X de E qui contienent à la fois $\overline{g(F)}$ et $\varphi(X)$. Bien entendu E lui-même est un élément de $\mathcal{E}$.

1. On note K l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que K est un élément de $\mathcal{E}$.

   Indication : par définition, l'ensemble K est inclus dans tous les éléments X de $\mathcal{E}$.
2. Soit $\widehat{K} = \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$: le résultat de la question précédente s'écrit donc $\widehat{K} \subset K$.

   Montrer que $\overline{g(F)} \cup \varphi(\widehat{K}) \subset \widehat{K}$. En déduire que $\widehat{K}$ est élément de $\mathcal{E}$, et que $\widehat{K} = K$.
3. Montrer que $\overset{-1}{g}(K)$ (l'image réciproque de K par g) est égale à $f(K)$.

   Indication : g étant injective, on sait que $\overset{-1}{g}(g(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.
4. Pour tout x de K, on pose $h(x) = f(x)$.

   Pour tout x de $\overline{K}$, $h(x)$ désigne l'unique antécédent de x par g (justifier son existence.)

   On définit ainsi une application h de E dans F. Montrer que h est bijective.

   (Indication : on prouvera successivement la surjectivité et l'injectivité de h, en discutant suivant la position dans E ou dans F, des éléments concernés.)
5. Conclusion ?

Corrigé du problème

Exercice 1 : vers l'opération ensembliste unique ?

1. Pour toutes parties X, Y de E, on a : $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ et $X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$.

   De même l'union qui apparaît dans $X \Delta Y = (\overline{X} \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$ peut être exprimée à l'aide d'une intersection et de passages au complémentaire.

   Conclusion : toute expression ensembliste peut être réécrite à l'aide uniquement des opérations "intersection" et "passage au complémentaire", et visiblement sans utiliser de symbole autre que ceux qui figuraient au départ dans cette expression.

2. Compte tenu de ce qui précède, il suffit de prouver que le passage au complémentaire et l'intersection peuvent s'exprimer uniquement à l'aide de la différence ensembliste.

   Or pour toute partie A de E, on a : $\overline{A} = E \setminus A$.

   De même, pour toutes parties A, B de E, on a : $A \cap B = A \setminus \overline{B} = A \setminus (E \setminus B)$.

   Conclusion : toute expression ensembliste peut être réécrite à l'aide uniquement de la différence ensembliste, au prix de l'utilisation du symbole E s'il ne figurait pas dans l'expression initiale.

3. (a) On constate que pour toute partie A de E :
   $$\nabla(A, A, A) = \left(\overline{A} \cap A \cap A\right) \cup \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{A}\right) = \emptyset \cup \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$$
   On voit donc que le passage au complémentaire peut s'exprimer à l'aide de ∇, sans utilisation de symbole supplémentaire.

   (b) De même, pour toutes parties A et B de E :
   $$\nabla(\overline{A}, \overline{A}, \overline{B}) = \left(A \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap A\right) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$
   On en déduit $A \cap B = \nabla(\nabla(A, A, A), \nabla(A, A, A), \nabla(B, B, B))$

   Ainsi l'intersection peut s'exprimer en utilisant uniquement l'opération ∇, et sans utilisation de symbole supplémentaire.

   (c) En utilisant la question 1, on en déduit que toute expression ensembliste se réécrit en utilisant uniquement ∇ et les symboles figurant au départ dans cette expression.

Exercice 2 : Propriétés caractéristiques de certaines sommes d'entiers

1. Il suffit d'utiliser les résultats bien connus : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. On va procéder par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

   On a bien $x_1 = 1$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{1} x_k\Big)^2 \Rightarrow (x_1^3 = x_1^2) \Rightarrow (x_1 = 1)$ (on rappelle que $x_1 > 0$.)

   On se donne maintenant un entier $n \geq 1$, et on suppose que l'égalité $x_k = k$ est vraie pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$: il suffit donc de prouver l'égalité $x_{n+1} = n + 1$.

   Par hypothèse, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big)^2$ donc : $\displaystyle x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \Big(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$.

   En utilisant l'hypothèse de récurrence cette égalité s'écrit aussi :

$$x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 \text{ c'est-à-dire : } x_{n+1}^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(x_{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}\Big)^2.$$

Après développement, on obtient $x_{n+1}^3 - x_{n+1}^2 - n(n+1)x_{n+1} = 0$.

Cette expression se factorise en $x_{n+1}(x_{n+1}+n)(x_{n+1}-n-1) = 0$. Sachant que $x_{n+1} > 0$, il vient $x_{n+1} = n+1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

3. Si l'entier S_n est un carré parfait pour tout $n \geq 1$, alors il en est ainsi de S_2.

   Il existe donc un entier $m \geq 1$ tel que $S_2 = 1 + 2^p = m^2$.

   On en déduit que l'entier $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ est une puissance de 2.

   Il en découle que les entiers $m-1$ et $m+1$ sont eux-mêmes des puissances de 2.

   Mais la seule possibilité pour que $m-1$ et $m+1$ (distants de deux unités !) appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ est donnée par $m - 1 = 2$ et $m + 1 = 4$.

   Ainsi l'entier m est égal à 3, et on a $2^p = m^2 - 1 = 8$ donc $p = 3$.

Exercice 3 : étude d'une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

1. Avec $m = n = 0$, on trouve $f(0) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2$ donc $f(0)(2f(0) - 1) = 0$.

   Comme $f(0)$ est un entier, on trouve nécessairement $f(0) = 0$.

   Avec n quelconque et $m = 0$, il vient : $f(n^2 + 0^2) = f(n)^2 + f(0)^2$ c'est-à-dire $f(n^2) = f(n)^2$.

2. On en déduit en particulier $f(1^2) = f(1)^2$, donc $f(1) = f(1)^2$, c'est-à-dire $a = a^2$.

   Autrement dit a est égal à 0 ou à 1.

3. – On trouve $f(1^2 + 1^2) = f(1)^2 + f(1)^2$, donc $f(2) = 2a^2 = 2a$.
   – De la même manière, $f(4) = f(2^2) = f(2)^2 = 4a^2 = 4a$.
   – Enfin, $f(5) = f(2^2 + 1^2) = f(2)^2 + f(1)^2 = 5a$.

4. On a $5^2 = 3^2 + 4^2$ donc $f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = f(3)^2 + f(4)^2$.

   Il en découle $f(3)^2 = f(5)^2 - f(4)^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$ donc $f(3) = 3a$.

5. On a $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$ donc $f(50) = f(7)^2 + f(1)^2 = f(5)^2 + f(5)^2$.

   Autrement dit $f(7)^2 = 2f(5)^2 - f(1)^2 = 50a^2 - a^2 = 49a^2$, ce qui donne $f(7) = 7a$.

6. – On a $f(8) = f(2^2 + 2^2) = f(2)^2 + f(2)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2 = 8a$.
   – De même : $f(9) = f(3^2) = f(3)^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 9a$.
   – Également : $f(10) = f(3^2 + 1^2) = f(3)^2 + f(1)^2 = (3a)^2 + a^2 = 10a^2 = 10a$.
   – Enfin : $10^2 = 6^2 + 8^2$ donc $f(10^2) = f(6)^2 + f(8)^2$.

     Il en découle $f(6)^2 = f(10)^2 - f(8)^2 = 100a^2 - 64a^2 = 36a^2$ donc $f(6) = 6a$.

7. Les deux égalités demandées sont évidentes après développement.

   On sait que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, \ldots, 10\}$.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 11. On suppose que $f(k) = ak$ pour tout entier k de $\{0, \ldots, n-1\}$. Pour conclure il reste à prouver que $f(n) = an$.

– Si n est pair, il existe $m \geq 6$ tel que $n = 2m$.
Les entiers $m-5$, $2m-4$ et $m+3$ sont dans $\{0, \ldots, n-1\}$.
On peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence et écrire :

$$\begin{aligned}
& f((2m)^2 + (m-5)^2) = f((2m-4)^2 + (m+3)^2) \\
\Rightarrow\quad & f(2m)^2 + f(m-5)^2 = f(2m-4)^2 + f(m+3)^2 \\
\Rightarrow\quad & f(n)^2 = f(2m-4)^2 + f(m+3)^2 - f(m-5)^2 \\
\Rightarrow\quad & f(n)^2 = (2m-4)^2a^2 + (m+3)^2a^2 - (m-5)^2a^2 = (2m)^2a^2 = (na)^2
\end{aligned}$$

– Si n est impair, il existe $m \geq 5$ tel que $n = 2m+1$. Dans ce cas $m-2$, $2m-1$ et $m+2$ sont dans $\{0, \ldots, n-1\}$. Avec des calculs analogues on écrit :

$$\begin{aligned}
& n^2 = (2m+1)^2 = (2m-1)^2 + (m+2)^2 - (m-2)^2 \\
\Rightarrow\quad & f(n)^2 = f(2m-1)^2 + f(m+2)^2 - f(m-2)^2 \\
\Rightarrow\quad & f(n)^2 = (2m-1)^2a^2 + (m+2)^2a^2 - (m-2)^2a^2 = (2m+1)^2a^2 = (na)^2
\end{aligned}$$

Dans tous les cas $f(n) = na$, ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

8. Conclusion : les seules applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$ pour tous entiers naturels m, n sont l'application nulle et l'application identité.

Exercice 4 : théorème de Cantor-Bernstein

1. Tous les éléments de $\mathcal{E}$ contiennent $\overline{g(F)}$. Il en est donc de même de leur intersection K.
Pour tout élément X de $\mathcal{E}$, on a $K \subset X$ donc $\varphi(K) \subset \varphi(X) \subset X$.
Ainsi $\varphi(K)$ est inclus dans tout élément X de $\mathcal{E}$ donc dans leur intersection K.
On a prouvé que K contient $\overline{g(F)}$ et $\varphi(K)$. Donc K est un élément de $\mathcal{E}$.
2. Dire que K est élément de $\mathcal{E}$, c'est dire qu'il contient $\widehat{K} = \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$.
Mais $\widehat{K} \subset K \Rightarrow \overline{g(F)} \cup \varphi(\widehat{K}) \subset \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$ c'est-à-dire $\overline{g(F)} \cup \varphi(\widehat{K}) \subset \widehat{K}$.
Cette inclusion signifie que $\widehat{K}$ est un élément de $\mathcal{E}$, donc que $\widehat{K}$ contient K.
On en déduit $K = \widehat{K}$, c'est-à-dire $K = \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$.
3. L'application g étant injective, on a $\overset{-1}{g}(g(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.
Ainsi : $$\begin{aligned}\overset{-1}{g}(K) &= \overset{-1}{g}\left(\overline{g(F)} \cup \varphi(K)\right) = \overset{-1}{g}\left(\overline{g(F)}\right) \cup \overset{-1}{g}(\varphi(K)) = \overline{\overset{-1}{g}(g(F))} \cup \overset{-1}{g}(g(f(K))) \\ &= \overline{F} \cup f(K) = \emptyset \cup f(K) = f(K)\end{aligned}$$
4. ⋄ *Surjectivité de h*
Soit y dans F. Si $y \in f(K)$ alors $\exists x \in K,\ y = f(x)$. Avec ces notations, on a $y = h(x)$.
Sinon, $y \in \overline{f(K)} = \overline{\overset{-1}{g}(K)} = \overset{-1}{g}(\overline{K})$. Donc $g(y) \in \overline{K}$ puis $h(g(y)) = y$ (définition de h.)
Tout élément y de F est donc une image par h : l'application h est surjective.

⋄ *Injectivité de h*
Soient x, x' deux éléments distincts de E.

- Si x, x' sont dans K, alors $h(x) = f(x)$ est distinct de $h(x') = f(x')$ (car f injective.)
- Si x, x' sont dans $\overline{K}$, alors il sont dans $g(F)$ (car $\overline{g(F)} \subset K$.)

  Il existe donc deux éléments y, y' de F tels que $x = g(y)$ et $x' = g(y')$.

  Puisque $x \neq x'$, on a $y \neq y'$. Or par définition de h on a $y = h(x)$ et $y' = h(x')$.
- Supposons que x est dans K et que x' est dans $\overline{K}$.

  Comme précédemment, soit $y' = h(x')$ l'élément de F tel que $g(y') = x'$.

  On a $g(y') \in \overline{K} \Rightarrow y' \in \overset{-1}{g}(\overline{K}) = \overline{\overset{-1}{g}(K)} = \overline{f(K)}$.

  Or x est dans K donc $y = h(x) = f(x)$ est dans $f(K)$. Ainsi $y \neq y'$.
- Ainsi, pour tous éléments x, x' de E : $x \neq x' \Rightarrow h(x) \neq h(x')$. L'application h est injective.

5. On a prouvé que s'il existe une injection de E sur F et une injection de F sur E, alors il existe une bijection de E sur E. Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Canto-Bernstein.