Exercice 1 [02650] [Correction]
On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et G l'ensemble des $M \in V$ inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et dont l'inverse est dans V.

(a) Quelle est la structure de G ?

(b) Soit $M \in V$. Montrer que $M \in G$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.

(c) Donner un groupe standard isomorphe à G muni du produit.

Exercice 2 [02649] [Correction]
Soit $(G, .)$ un groupe fini tel que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

où e est le neutre de G. On suppose G non réduit à $\{e\}$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 [02648] [Correction]
Soit G un groupe, H un sous-groupe de G, A une partie non vide de G. On pose $AH = \{ah \mid a \in A, h \in H\}$. Montrer que $AH = H$ si, et seulement si, $A \subset H$.

Exercice 4 [02677] [Correction]
Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension finie p sur $\mathbb{L}$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie q sur $\mathbb{L}$. Relier n, p, q.

Exercice 5 [02662] [Correction]
Soit $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une $\mathbb{Q}$-base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K.

(b) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 [02658] [Correction]

(a) Pour $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge n = 1$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1 \quad [n]$.

(b) Pour p premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$, montrer que p divise $\binom{p}{k}$.

(c) Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $a^{n-1} = 1 \quad [n]$. On suppose que pour tout x divisant $n-1$ et différent de $n-1$, on a $a^x \neq 1 \quad [n]$. Montrer que n est premier.

Exercice 7 [02660] [Correction]
Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 8 [02661] [Correction]
Soit p un nombre premier. On note Z_p l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et p ne divise pas b. On note J_p l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, p divise a et p ne divise pas b.

(a) Montrer que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que J_p est un idéal de Z_p et que tout idéal de Z_p autre que Z_p est inclus dans J_p.

(c) Déterminer les idéaux de Z_p.

Exercice 9 [03929] [Correction]

(a) Déterminer l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. De quelle structure peut-on munir cet ensemble ?

(b) Y a-t-il, à isomorphisme près, d'autres groupes de cardinal 4 ?

Exercice 10 [02713] [Correction]
Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \operatorname{tr} A = 8$$

Exercice 11 [02703] [Correction]
Diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 [02702] [Correction]
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1\le i,j\le n}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13 [02724] [Correction]
Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n.
Montrer que A est nilpotente si, et seulement si,

$$\forall p \in [\![1\,;n]\!], \operatorname{tr} A^p = 0$$

Exercice 14 [01948] [Correction]
Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\operatorname{tr} M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

Exercice 15 [02704] [Correction]
Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 [02719] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \ge 1$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

(a) Montrer que f est nilpotent.

(b) On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\operatorname{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{Mat}_e g = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+n-1)$$

Exercice 17 [02707] [Correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux valent a et les autres valent b. A est-elle diagonalisable ? Quelles sont les valeurs propres de A ? Quel est le polynôme minimal de A ? Sous quelles conditions sur a et b, A est-elle inversible ?
Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de A.

Exercice 18 [02696] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même valeurs propres.

Exercice 19 [02705] [Correction]
Soient a, b deux réels et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \iddots & a & b \\ b & \iddots & \iddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

Réduire ces deux matrices.

Exercice 20 [02692] [Correction]
Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 21 [02667] [Correction]
Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 22 [02706] [Correction]
On pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous a, b réels.

(a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?

(b) Étudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a, b)^n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞.

Exercice 23 [02700] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$ on pose

$$T(f)\colon x \in [0\,;1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Vérifier que T est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice 24 [02729] [Correction]
Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $A = (\min(i, j))_{1 \le i,j \le n}$.

(a) Trouver une matrice triangulaire inférieure unité L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

(b) Exprimer A^{-1} à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $\operatorname{Sp} A^{-1} \subset [0\,;4]$.

Exercice 25 [02718] [Correction]
Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de degré $n + 1$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Déterminer les éléments propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 26 [03063] [Correction]
Soit E l'espace des fonctions f de classe C^1 de $[0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.
Pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

Exercice 27 [02697] [Correction]
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Indice : Commencer par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 28 [02714] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que la matrice A est de rang pair.

Exercice 29 [03755] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k \ge 2$.
Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

Exercice 30 [02698] [Correction]

(a) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n, existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique $P(X)$?

(b) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ le polynôme

$$P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$$

appartient encore à $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont de modules ≤ 1.
Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Exercice 31 [01956] [Correction]
Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$?

Exercice 32 [02722] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $u \mapsto fu - uf$ de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 33 [02726] [Correction]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^3 = \mathrm{Id}$$

Décrire les sous-espaces stables de u.
Même question avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 34 [02681] [Correction]
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$. Est-il vrai que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires ?

Exercice 35 [02708] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = 0$?

Exercice 36 [02897] [Correction]
On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) L'opérateur T est-il un automorphisme de E ?

(b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de E de dimension finie impaire et stable par T ?

Exercice 37 [02699] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(a) Comparer $\operatorname{Sp} B$ et $\operatorname{Sp} {}^tB$.

(b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe λ pour lequel $AC = \lambda C$, alors $\operatorname{Im} C \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

(c) Soit λ une valeur propre commune à A et B. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, telle que $AC = CB = \lambda C$.

(d) On suppose l'existence de $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} C = r$ et $AC = CB$. Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de A et B est de degré $\geq r$.

(e) Étudier la réciproque de d).

Exercice 38 [02691] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 [02727] [Correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal Π_f.
Montrer l'existence de $x \in E$ tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)(x) = 0\}$$

soit l'ensemble des multiples de Π_f.

Exercice 40 [02723] [Correction]
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $T \in \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par

$$T(g) = f \circ g - g \circ f$$

Montrer que si f est diagonalisable, alors T est diagonalisable ; si f est nilpotente, alors T est nilpotente.

Exercice 41 [02690] [Correction]
Soient A et B des matrices complexes carrées d'ordre n. On suppose les matrices $A + 2^k B$ nilpotentes pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$. Montrer que les matrices A et B sont nilpotentes.

Exercice 42 [02720] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On suppose $u^3 = u$, $\operatorname{tr} u = 0$ et $\operatorname{tr} u^2 = 2n$. On note

$$C(u) = \left\{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid uv = vu\right\}$$

(a) Calculer la dimension $C(u)$.

(b) Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice 43 [02721] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.

(b) Montrer que f_A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 44 [03763] [Correction]
Pour $n \geq 2$, on note H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible.

(a) Montrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 45 [00708] [Correction]
Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 46 [03291] [Correction]

(a) Montrer que, pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$, on a l'égalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

si, et seulement si, il existe $n-1$ réels positifs $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1$$

(b) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^n = I_n$ et $\operatorname{tr} M = n$

Exercice 47 [00520] [Correction]
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est impossible que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \mid x_j\right) < 0$$

On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Exercice 48 [02735] [Correction]
Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 49 [01332] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle , \rangle : (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

(a) Justifier la définition de $\langle , \rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Calculer $P_k(0)^2$.

(c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Exercice 50 [01595] [Correction]
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 51 [02666] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,dt$$

(b) Établir que A est de degré n.

Exercice 52 [03979] [Correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.
Déterminer le maximum sur la boule unité fermée de $f : x \mapsto (a\,|\,x)\,(b\,|\,x)$

Exercice 53 [03928] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec sa transposée. Montrer que M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont de taille 1 ou de taille 2 de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 54 [01330] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A{}^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(a) Montrer que ${}^tAA = 0$.

(b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 55 [02753] [Correction]
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives.
Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \le \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 56 [02715] [Correction]
Trouver les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M^2$ et que M n'ait aucune valeur propre réelle.

Exercice 57 [03748] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.

(a) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

(b) Montrer que si n est pair, $\det A \ge 0$. Sous quelle condition l'inégalité est-elle stricte ?

Exercice 58 [03749] [Correction]
Montrer que A antisymétrique réelle d'ordre n est semblable à

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible d'ordre pair.

Exercice 59 [02744] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A.

(a) Étudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$$

lorsque $p \to +\infty$.

(b) La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 60 [02730] [Correction]
Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E

$$f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp ?$$

Exercice 61 [02923] [Correction]
Soit E un espace euclidien de dimension 3, r dans $\mathrm{SO}(E)$ et s une symétrie orthogonale.
Caractériser l'application

$$s \circ r \circ s$$

Exercice 62 [02731] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \mathrm{tr}\,{}^tAB$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ-orthogonale.

Exercice 63 [03752] [Correction]
Soient A une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives et U une matrice orthogonale de même taille.
Comparer $\operatorname{tr}(AU)$ et $\operatorname{tr}(UA)$ à $\operatorname{tr} A$.

Exercice 64 [02924] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul, $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$. Décrire $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 65 [02746] [Correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Quelles sont les A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $J + A$ soit inversible ?

Exercice 66 [02740] [Correction]
Dans un espace euclidien E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) f est une isométrie vectorielle ;
(ii) $f^2 = -\operatorname{Id}$;
(iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x.

Exercice 67 [02750] [Correction]
Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

Exercice 68 [02759] [Correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr} A$.

(a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(d) Étudier la réciproque.

(e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Exercice 69 [02925] [Correction]
Soient f et g dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tels que $f \neq g$ et $g \circ f = f \circ g$.
Montrer que f et g sont, soit deux rotations de même axe, soit deux symétries de droites orthogonales.

Exercice 70 [02751] [Correction]
Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de ${}^tAA$.

Exercice 71 [02716] [Correction]
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le système

$$\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^tMM = M{}^tM \end{cases}$$

Exercice 72 [02749] [Correction]
[Transformation de Cayley]

(a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

(b) Soit

$$\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \operatorname{Sp}(\Omega)\}$$

Exercice 73 [02748] [Correction]
On note $(.|.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour toute famille $u = (u_1, \ldots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = \big((u_i | u_j)\big)_{1 \leq i,j \leq p}$$

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots u_p)$ est libre si, et seulement si, M_u est inversible.

(b) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.
Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = f(v_i)$ pour tout i.

Exercice 74 [02757] [Correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficient sont égaux à 1. Trouver $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^tPJP = D$.

Exercice 75 [03927] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose

$$AB + BA = 0$$

Montrer $AB = BA = 0$.

Exercice 76 [03751] [Correction]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2$.

(a) Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.

(b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Montrer que le noyau de $f^2 + f + \mathrm{Id}$ est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 77 [03762] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On pose

$$B = A^3 + A + I_n$$

Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 78 [03923] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 = A^tA$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, G est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car V l'est. Ainsi G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ donc un groupe.

(b) Si $M \in G$ alors $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$ et $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$ donc $\det M = \pm 1$. Inversement si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = {}^t\mathrm{Com}\, M \in V$ donc $M \in G$.

(c)
$$\det M = ((a+c)^2 - (b+d)^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$
donc
$$\det M = \pm 1 \iff \begin{cases} (a+c)^2 - (b+d)^2 = \pm 1 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = \pm 1 \end{cases}$$
La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :
$a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$.
Posons J la matrice obtenue pour $a = c = d = 0$ et $b = 1$. On vérifie $J^4 = I_4$.
L'application $\varphi\colon U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ définie par $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$ est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi G est isomorphe à $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou plus élégamment à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : [énoncé]

Le groupe $(G, .)$ est abélien. En effet, pour tout $x \in G$, on a $x^{-1} = x$ donc, pour $x, y \in G$, $(xy)^{-1} = xy$. Or $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$ donc $xy = yx$.
Pour $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $x \in G$, posons
$$\bar{0}.x = e \text{ et } \bar{1}.x = x$$
On vérifie qu'on définit alors un produit extérieur sur G munissant le groupe abélien $(G, .)$ d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel. En effet, pour $(x, y) \in G^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ on a
$$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \text{ et } \bar{1}.x = x$$
De plus, cet espace est de dimension finie car $\mathrm{Card}\, G < +\infty$, il est donc isomorphe à l'espace $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +, .)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
En particulier, le groupe $(G, .)$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 : [énoncé]

Supposons $AH = H$.
$$\forall a \in A, a = ae \in AH = H$$
donc $A \subset H$.
Supposons $A \subset H$. Pour $x \in AH$, $x = ah$ avec $a \in A$, $h \in H$. Or $a, h \in H$ donc $x = ah \in H$. Ainsi $AH \subset H$.
Inversement, pour $a \in A$ (il en existe car $A \neq \emptyset$) et pour tout $h \in H$, $h = a(a^{-1}h)$ avec $a^{-1}h \in H$ donc $h \in AH$. Ainsi $H \subset AH$ puis $=$.

Exercice 4 : [énoncé]

Il est facile de justifier que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel sous réserve de bien connaître la définition des espaces vectoriels et de souligner que qui peut le plus, peut le moins...
Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.
Considérons la famille des $(\lambda_j \vec{e}_i)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$. Il est facile de justifier que celle-ci est une famille libre et génératrice du $\mathbb{L}$-espace vectoriel E. Par suite E est de dimension finie $q = np$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Il est clair que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-génératrice.
Montrons qu'elle est libre en raisonnant par l'absurde.
Supposons $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.
Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ non tous nuls.
Quitte à factoriser, on peut aussi supposer $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.
On a $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\right)^2$ donc
$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2 + 6cd\sqrt{2} + 6d^2.$$
Par l'irrationalité de $\sqrt{2}$ on parvient au système
$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3c^2 + 6d^2 \\ ab = 3cd \end{cases}$$
Par suite $3 \mid ab$ et $3 \mid a^2 + 2b^2$ donc $3 \mid a$ et $3 \mid b$.
Ceci entraîne $3 \mid cd$ et $3 \mid c^2 + 2d^2$ donc $3 \mid c$ et $3 \mid d$.
Ceci contredit $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.
Ainsi la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre et c'est donc une $\mathbb{Q}$-base de K.

(b) Sans peine, on vérifie que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

Soit $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{K}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{(a+b\sqrt{2}) + (c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}\\ &= \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{(a^2+2b^2-3c^2-6d^2)+2(ab-3cd)\sqrt{2}}\\ &= \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{\alpha+\beta\sqrt{2}}\end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{x} = \frac{(a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6}))(\alpha-\beta\sqrt{2})}{\alpha^2-2\beta^2} \in K$$

et donc K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
Notons que les quantités conjuguées par lesquelles on a ci-dessus multiplié ne sont pas nuls car x est non nul et la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de cardinal $\varphi(n)$.

(b) $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ donc $p \mid k\binom{p}{k}$ or $p \wedge k = 1$ donc $p \mid \binom{p}{k}$.

(c) Posons $d = (n-1) \wedge \varphi(n)$. $d = (n-1)u + \varphi(n)v$ donc $a^d = 1 \quad [n]$. Or $d \mid n-1$ donc nécessairement $d = n-1$. Par suite $n-1 \mid \varphi(n)$ puis $\varphi(n) = n-1$ ce qui entraîne que n est premier.

Exercice 7 : [énoncé]
Si $p = 2$: il y a deux carrés dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Si $p \geq 3$, considérons l'application $\varphi\colon x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \varphi(y) \iff x = \pm y$.
Dans $\operatorname{Im}\varphi$, seul 0 possède un seul antécédent, les autres éléments possèdent deux antécédents distincts. Par suite $\operatorname{Card}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1 + 2(\operatorname{Card}\operatorname{Im}\varphi - 1)$ donc il y $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Facile.

(b) J_p idéal de Z_p : facile.
Soit I un idéal de Z_p. On suppose $I \not\subset J_p$, il existe donc un élément $a/b \in I$ vérifiant $a/b \notin J_p$. Par suite p ne divise ni a, ni b et donc et $b/a \in Z_p$ de sorte que a/b est inversible dans Z_p. Ainsi l'idéal contient un élément inversible, donc par absorption il possède 1 et enfin il est égal à Z_p.

(c) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons J_{p^k} l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p^k \mid a$ et p ne divise pas b. On vérifie aisément que J_{p^k} est un idéal de Z_p.
Soit I un idéal de Z_p. Posons
$k = \max\left\{\ell/\forall x \in I, \exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = a \mid b, p^\ell \mid a, p \text{ ne divise pas } b\right\}$.
On a évidemment $I \subset J_{p^k}$.
Inversement, il existe $x = a/b \in I$ avec $p^k \mid a$, p^{k+1} ne divise pas a et p ne divise pas b.
On peut écrire $a = p^k a'$ avec p qui ne divise pas a', et donc on peut écrire $x = p^k x'$ avec $x' = a'/b$ inversible dans Z_p. Par suite tout élément de J_{p^k} peut s'écrire xy avec $y \in Z_p$ et donc appartient à I. Ainsi $J_{p^k} \subset I$ puis $=$.
Finalement les idéaux de Z_p sont les J_{p^k} avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Les inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont les $\bar{k}$ avec $k \wedge 8 = 1$. Ce sont donc les éléments $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}$ et $\bar{7}$.
L'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.

(b) Le groupe $\left(\left\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\right\}, \times\right)$ vérifie la propriété $x^2 = 1$ pour tout x élément de celui-ci. Ce groupe n'est donc pas isomorphe au groupe cyclique $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ qui constitue donc un autre exemple de groupe de cardinal 4. En fait le groupe $\left(\left\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\right\}, \times\right)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 10 : [énoncé]
Si A est solution alors $P = X(X-2)^2$ est annulateur de A et les valeurs propres de A figurent parmi $\{0, 2\}$. Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.
Par le lemme de décomposition des noyaux, $\ker(A - 2\,\mathrm{Id})^2$ et $\ker A$ sont supplémentaires.
Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et $n-4$.
Ainsi A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4}\end{pmatrix}$$

avec $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 0$.

En raisonnant sur le rang, on montre que M est semblable à

$$O_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 11 : [énoncé]
Étudions la première matrice que nous noterons A.
Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau.
En posant le système $AX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$$

En notant λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation, on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons B, on obtient $B = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où λ_1, λ_2 sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Exercice 12 : [énoncé]
En posant $M = (a_i a_j)_{1 \le i,j \le n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$.
Si $\lambda \neq 0$ alors M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable.
Si $\lambda = 0$ alors $M^2 = 0$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0$ ce qui revient à $(a_1, \dots, a_n) = 0$.
Notons que la matrice M est symétrique mais pas nécessairement réelle : le théorème spectral ne s'applique pas.

Exercice 13 : [énoncé]
Si la matrice A est nilpotente alors elle est annulée par un polynôme X^m et donc

$$\operatorname{Sp} A \subset \{0\}$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

De la même façon, les matrices A^p sont aussi semblables à des matrices triangulaires supérieures strictes et donc

$$\forall p \in [\![1\,;n]\!], \operatorname{tr} A^p = 0$$

Inversement, supposons $\operatorname{tr} A^p = 0$ pour tout $p \in [\![1\,;n]\!]$.
Nous allons montrer que seule 0 est valeur propre de A. On pourra alors par trigonalisation affirmer que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure stricte T et puisque $T^n = O_n$ on aura aussi $A^n = O_n$ ce qui conclut.
Par l'absurde supposons donc que la matrice A ait au moins une valeur propre non nulle.
Notons $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres non nulles de la matrice A et $\alpha_1, ..., \alpha_m$ leurs multiplicités respectives.
En procédant encore à une trigonalisation de la matrice A, on peut affirmer

$$\forall 1 \le p \le n, \operatorname{tr}(A^p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^p = 0$$

On ne retient que les m premières équations pour exprimer le système

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = 0 \\ \lambda_1^2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m^2 \alpha_m = 0 \\ \qquad \dots \\ \lambda_1^m \alpha_1 + \lambda_2^m \alpha_2 + \cdots + \lambda_m^m \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Ce système peut se percevoir sous la forme matricielle $VX = 0$ avec $X = {}^t(\alpha_1 \dots \alpha_m)$ et

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice V se calcule par déterminant de Vandermonde et est non nul car $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$. On en déduit

$$\forall 1 \le i \le m, \alpha_i = 0$$

ce qui est absurde car les α_i étaient des multiplicités de véritables valeurs propres.

Exercice 14 : [énoncé]
Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X-2)^2$$

est annulateur de M.
On en déduit $\operatorname{Sp} M \subset \{0, 2\}$ et M trigonalisable (car M annule un polynôme scindé).
Par suite $\operatorname{tr} M$ est la somme des valeurs propres de M comptées avec multiplicité et puisque $\operatorname{tr} M = 0$, seule 0 est valeur propre de M.
On en déduit que la matrice $M - 2I_n$ est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n$$

Exercice 15 : [énoncé]
1ère méthode :
Notons $\chi_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de cette matrice de taille n.
Par développement du déterminant selon la dernière colonne on obtient

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)\chi_{n-1}(\lambda) - (\lambda - 1)^{n-2}$$

En étudiant les premiers termes de cette suite, on conjecture

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (n-1)(\lambda - 1)^{n-2}$$

ce que l'on vérifie aisément par récurrence.

Les valeurs propres de la matrice sont donc 1 (pour $n \ge 3$) et les deux racines $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$.
2ème méthode :
Notons A la matrice étudiée. L'équation $AX = \lambda X$ donne le système

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = (\lambda - 1) x_2 \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda - 1) x_n \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$, on peut obtenir une solution non nulle avec les conditions

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 + \cdots + x_n = 0$$

Pour $\lambda \neq 1$, le système devient

$$\begin{cases} (n-1)x_1 = (\lambda - 1)^2 x_1 \\ x_2 = x_1/(\lambda - 1) \\ \vdots \\ x_n = x_1/(\lambda - 1) \end{cases}$$

Pour $x_1 = 0$, la solution du système est nulle.
Pour $x_1 \neq 0$, on peut former une solution non nulle à condition que $(\lambda - 1)^2 = n - 1$ ce qui fournit les valeurs déjà remarquées au dessus.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) On vérifie $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$.
Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \neq 0$ alors l'endomorphisme $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ admet une infinité de valeurs propres.
Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que f est nilpotent.

(b) $f^n = 0$ (car $\dim E = n$) et $f^{n-1} \neq 0$. Pour $x \notin \ker f^{n-1}$ et $e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$, on montre classiquement que e' est une base de E dans laquelle la matrice de f est telle que voulue.
$f(g(f^{n-1}(x)) = 0$ donc $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

Aussi $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda+k)f^{n-1}(x)$ et donc la matrice de g dans e' et triangulaire supérieure avec sur la diagonale $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+n-1$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda+n-1\}$$

Soit y vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda+n-1$.
Si $y \in \ker f^{n-1}$ alors puisque $\ker f^{n-1}$ est stable par g, $\lambda+n-1$ est valeur propre de l'endomorphisme induit par g sur $\ker f^{n-1}$. Cela n'étant par le cas $y \notin \ker f^{n-1}$. On vérifie alors facilement que la famille $e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$ résout notre problème.

Exercice 17 : [énoncé]
A est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (X-(a+(n-1)b)(X-(a-b))^{n-1}$$

$$\mathrm{Sp}(A) = \{a+(n-1)b, a-b\} \text{ (si } n \geq 2)$$

$$\pi_A = (X-(a+(n-1)b))(X-(a-b))$$

A est inversible si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ *i.e.* $a+(n-1)b \neq 0$ et $a \neq b$.

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax+(n-1)by \\ \beta = ay+bx+(n-2)by \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax+(n-1)by = 1 \\ bx+(a+(n-2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter A^{-1}.

Exercice 18 : [énoncé]
Il est classique d'établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en commençant par établir le résultat pour A inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

Exercice 19 : [énoncé]
$A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, \dots, a-b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$ avec
Si n est impair : $\Delta = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \unicode{x22F0} & & & \unicode{x22F0} & \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Si n pair : $\Delta = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & -1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & & \unicode{x22F0} & & & \unicode{x22F0} & 1 \\ \vdots & & \unicode{x22F0} & & & -1 & \unicode{x22F0} & (0) \\ 1 & -1 & & & (0) & 1 & & \end{pmatrix}$$

Exercice 20 : [énoncé]
La colonne ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\operatorname{diag}\left(6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc *a fortiori* semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 : [énoncé]
Considérons $T\colon P(X) \mapsto P(X+1)$. T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme

$$\chi_T = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Cela fournit directement la propriété voulue.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ avec $D(a,b) = \operatorname{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $M(a,b)^n \to 0$ si, et seulement si, $|a+b| < 1$, $|a-b| < 1$ et $\left|a^2-b^2\right| < 1$.
Or $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.
L'étude graphique est alors simple.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$T(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'application $T(f)$ apparaît alors comme continue (et même dérivable).
Ainsi, l'application T opère de E dans E, elle de surcroît évidemment linéaire.

(b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant

$$T(f) = \lambda f$$

Cas $\lambda = 0$
On a $T(f) = 0$ donc

$$\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

En dérivant, on obtient

$$x f(x) - x f(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

En dérivant à nouveau, on obtient $f = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T.
Cas $\lambda \neq 0$
On a $T(f) = \lambda f$

$$\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f$$

En particulier, on peut affirmer que $f(0) = 0$ car $T(f)(0) = 0$.
Le premier membre de l'équation $T(f) = \lambda f$ est dérivable donc la fonction f est également dérivable et, en dérivant, on obtient la relation

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f'(x)$$

En particulier $f'(1) = 0$.
Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction f est deux fois dérivable et on obtient en dérivant l'équation différentielle

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0$$

Sous cas $\lambda < 0$
Sachant $f(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle donne

$$f(x) = A\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$$

La condition $f'(1) = 0$ entraîne toujours $f = 0$ et donc un tel λ n'est pas valeur propre de T.
Sous cas $\lambda > 0$
Sachant $f(0) = 0$, on obtient par résolution de l'équation différentielle

$$f(x) = A\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La condition $f'(1) = 0$ n'entraînera pas $f = 0$ que si

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\lambda = \frac{1}{(k\pi)^2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que

$$f : x \mapsto \sin(k\pi x)$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1/(k\pi)^2$

Exercice 24 : [énoncé]

(a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^tL$$

(b) $U = I + N + \cdots + N^{n-1}$, $(I - N)U = I$ donc $U^{-1} = I - N$, $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^tN$ donc $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = I - N - {}^tN + N{}^tN$.

(c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons χ_n le polynôme caractéristique de $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.
On a $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$ avec $\chi_0(\lambda) = 1$ et $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$.
En écrivant $\lambda = 2 + 2\cos\theta$ avec $\theta \in [0\,;\pi]$ et en posant $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2\cos\theta)$ on a la relation :
$f_{n+2}(\theta) + 2\cos\theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$, $f_0(\theta) = 1$ et $f_1(\theta) = 2\cos\theta - 1$.
La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi, χ_n admet n racines dans $[0\,;4]$ et puisque ce polynôme est de degré n il n'y en a pas ailleurs : $\operatorname{Sp} A^{-1} \subset [0\,;4]$.

Exercice 25 : [énoncé]
On écrit

$$B = \alpha(X - x_0)\dots(X - x_n)$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors $B \mid (A - \lambda)P$. Pour des raisons de degré, B et $A - \lambda$ ne peuvent être premiers entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda = A(x_i)$. Inversementn pour $\lambda = A(x_i)$, $P = \prod_{j=0, j\neq i}^n (X - x_j)$, $\Phi(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$. Ainsi,

$$\operatorname{Sp}\Phi = \{A(x_i) \mid i \in [\![0\,;n]\!]\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = A(x_i)$.
Quitte à réindexer, on peut supposer que $\lambda = A(x_0)$.
S'il existe d'autres x_i tels que $\lambda = A(x_i)$ on réindexe encore les $x_1, \dots, x_n$ de sorte que $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$ et $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$. Ainsi $x_0, \dots, x_p$ sont racines de $A - \lambda$ alors que $x_{p+1}, \dots, x_n$ ne le sont pas.
Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $B \mid (A - \lambda)P$. Or $A - \lambda = (X - x_0)\dots(X - x_p)\tilde{A}$ avec $x_{p+1}, \dots, x_n$ non racines de $\tilde{A}$. Puisque $(X - x_{p+1})\dots(X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1$,

$$B \mid (A - \lambda)P \iff (X - x_{p+1})\dots(X - x_n) \mid P.$$

Ainsi

$$E_\lambda(\Phi) = \left\{(X - x_{p+1})\dots(X - x_n)Q \mid Q \in \mathbb{R}_p[X]\right\}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la dimension de l'espace, Φ est diagonalisable.

Exercice 26 : [énoncé]
Puisque f est de classe C^1 et que $f(0) = 0$, on peut écrire

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} f'(0)t + o(t)$$

Ainsi la fonction $\varphi : t \mapsto f(t)/t$ peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant $T(f)(x)$ a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, la fonction $T(f)$ apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de cette fonction continue φ, c'est donc une fonction élément de E. Enfin, la linéarité de l'application T étant immédiate, on peut affirmer que T est un endomorphisme de E.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $T(f) = \lambda f$ alors pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$T(f)(x) = \lambda f(x)$$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout $x \in [0\,;+\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x)$$

Si $\lambda = 0$ alors f est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda \neq 0$, f est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' = y$.
Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur $]0\,;+\infty[$ est

$$y(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$, il faut $C = 0$ ou $1/\lambda \geq 1$. Ainsi les valeurs propres de T sont les éléments de l'intervalle $]0\,;1]$.
Inversement, soient $\lambda \in]0\,;1]$ et la fonction $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda}$ prolongée par continuité en 0.
La fonction f_λ est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$, s'annule en 0 et vérifie $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ sans être la fonction nulle.
Finalement, les valeurs propres de T sont exactement les éléments de l'intervalle $]0\,;1]$.

Exercice 27 : [énoncé]
Dans le cas où

$$A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

avec C bloc carré de taille r.
Dans le cas général, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $r = \operatorname{rg} A$ et P, Q inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X)$$

donc

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Exercice 28 : [énoncé]
Le polynôme

$$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

annule la matrice$A$. Ce polynôme étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\operatorname{Sp} A \subset \left\{0, j, j^2\right\}$$

Puisque la matrice A est réelle, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité $p \in \mathbb{N}$. La diagonalisation complexe de A comporte alors p nombres j et p nombres j^2 sur la diagonale, les éventuels autres coefficients diagonaux étant nuls. La matrice A est alors de même rang que cette matrice diagonale, c'est-à-dire $2p$.

Exercice 29 : [énoncé]
L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons A^k triangulaire supérieure pour tout $k \geq 2$. Introduisons le polynôme caractéristique de A

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + \det(A)$$

Puisque celui-ci est annulateur de A, on peut écrire

$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + \det(A) I_n = O_n$$

En multipliant la relation par A et en réorganisant

$$A = \frac{-1}{\det A}(a_1 A^2 + \cdots + a_n A^{n+1})$$

et la matrice A est donc triangulaire supérieure.
Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nous obtenons un contre-exemple où $A^k = O_2$ pour tout $k \geq 2$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Oui, un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons !
Pour $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, la matrice compagnon associée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & X & \vdots \\ (0) & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Il peut se calculer par la succession d'opérations élémentaires

$$L_i \leftarrow L_i + XL_{i+1} \text{ avec } i \text{ allant de } n-1 \text{ à } 1 \text{ dans cet ordre}$$

On obtient alors

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 0 & & (0) & \alpha \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & (a_{n-2} + a_{n-1}X + X^2) \\ (0) & & -1 & X + a_{n-1}X \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha = \left(a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n\right)$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\chi_M(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

Ainsi, pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n, on peut construire une matrice à coefficients entiers dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n P(X)$.

(b) Il existe une matrice A dont le polynôme caractéristique est P. Puisque toute matrice complexe est trigonalisable, la matrice A est en particulier semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice A^q est alors semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A^q est alors P_q. Or A^q est une matrice à coefficients entiers et donc son polynôme caractéristique P_q est aussi à coefficients entiers.

(c) Compte tenu des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de P et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes P possibles car les coefficients de P sont entiers et borné. Considérons un tel polynôme. L'application $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$ n'est pas injective compte tenu à cause de l'argument de cardinalité précédent. Il existe donc $q < r$ tel que $P_q = P_r$. Ainsi, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}_n$ vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r$$

À l'aide d'une décomposition en cycles de σ, on peut affirmer qu'il existe une puissance de σ égale à l'identité et donc conclure que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ il existe $q' > q$ tel que $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$. On peut alors affirmer que λ_i est nul ou bien racine de l'unité.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $\operatorname{Sp} A = \{0\}$ et $A \neq O_n$ donc A n'est pas diagonalisable.

(b) On remarque $A^n = O_n$ et $A^{n-1} \neq O_n$.
S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$ alors $B^{2n} = A^n = O_n$ donc B est nilpotente.
Par suite $B^n = O_n$.
Or $B^{2n-2} \neq O_n$ avec $2n - 2 \geq n$, c'est absurde.

Exercice 32 : [énoncé]

Posons ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ étudié. On observe que $\phi^3 = \phi$. Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que ϕ est diagonalisable de seules valeurs propres possibles 0, 1 et -1.
En introduisant une base adaptée à la projection f, la matrice de cet endomorphisme est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base, on obtient :
$\phi(u) = 0 \iff B = 0$ et $C = 0$.
$\phi(u) = u \iff A = 0$, $C = 0$ et $D = 0$.
$\phi(u) = -u \iff A = 0$, $B = 0$ et $D = 0$.

Exercice 33 : [énoncé]

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$$

Si F est un sous-espace vectoriel stable alors posons

$$F_1 = F \cap \ker(u - \mathrm{Id})$$

et

$$F_2 = F \cap \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$$

Montrons $F = F_1 \oplus F_2$.
Tout $x \in F$ peut s'écrire $x = a + b$ avec $a \in \ker(u - \mathrm{Id})$ et $b \in \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
Puisque $u(x) = a + u(b) \in F$ et $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$, on a $a = \frac{1}{3}\left(x + u(x) + u^2(x)\right) \in F$ puis $b = x - a \in F$.
Ainsi $a \in F_1$, $b \in F_2$ et on a donc $F \subset F_1 + F_2$.
Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure $F = F_1 \oplus F_2$.
Puisque $F_2 \subset \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$, pour $x \in F_2$ non nul $(x, u(x))$ est libre et $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Cela permet d'établir que F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ avec $x \neq 0$, $x \in \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$. Quant à F_1, il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de $\ker(u - \mathrm{Id})$ est stable par u.

Exercice 34 : [énoncé]
$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$ est annulateur de f donc par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \ker f \oplus \ker(f^2 - 3af + a^2\,\mathrm{Id})$ car X et $X^2 - 3aX + a^2$ sont premiers entre eux.
Or a étant non nul, on montre élémentairement $\ker(f^2 - 3af + a^2\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\, f$ tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que $(f^2 - 3af + a^2\,\mathrm{Id}) \circ f = 0$. Il est donc vrai que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 35 : [énoncé]
$A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & (0) & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 & (0) & & -1 \\ & \iddots & & \vdots & & \iddots & \\ 1 & & (0) & 0 & -1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$$

et les polynômes annulateurs de A sont les multiples de π_A.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) L'application T est évidemment linéaire et est à valeurs dans E.
Soit $g \in E$. Montrons que l'équation $Tf = g$ admet une solution unique.
Unicité : Si $Tf = g$ alors $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy ceci détermine $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de façon unique et donc f aussi.
Existence : La dérivée de la fonction solution $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$ est solution.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par T. Notons I l'endomorphisme de E défini par $I(f) \colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque F est stable par T, F est aussi stable par I. L'endomorphisme induit par I sur le sous-espace vectoriel de dimension finie F admet un polynôme minimal $\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On a alors pour tout $f \in F$ l'égalité $y + a_{n-1}y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$ en notant $y = I^n(f)$. De plus, on a les conditions initiales $y(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$ ce qui donne $y = 0$ puis $f = 0$. Ainsi $F = \{0\}$. Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par T. Quel intérêt au « impaire » ?

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $\mathrm{Sp}\, B = \mathrm{Sp}\, {}^tB$ car $\chi_B = \chi_{{}^tB}$.

(b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A(CX) = \lambda(CX)$ donc $CX \in \ker(A - \lambda I_n)$.

(c) Soit X et Y des vecteurs propres de A et ${}^tB$ associé à la valeur propre λ. La matrice $C = X^tY$ est solution.

(d) On peut écrire $C = QJ_rP$ avec P, Q inversibles. La relation $AC = CB$ donne $Q^{-1}AQJ_r = J_rPBP^{-1}$.
En écrivant les matrices $Q^{-1}AQ$ et PBP^{-1} par blocs, l'égalité $Q^{-1}AQJ_r = J_rPBP^{-1}$ impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que $\chi_A = \chi_{Q^{-1}AQ}$ et $\chi_B = \chi_{PBP^{-1}}$ ont un facteur commun de degré $\geq r$, à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position (1,1).

(e) La réciproque est assurément fausse en toute généralité. Pour $r = n$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

Exercice 38 : [énoncé]
Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $PA = BP$. En posant $Q = \mathrm{Re}(P)$ et $R = \mathrm{Im}(P)$ on obtient $QA + iRA = BQ + iBR$ donc $QA = BQ$ et $RA = BR$ car A, B, Q, R réelles. Cependant on ne sait pas si Q ou R sont inversibles. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ et $\lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$ est une fonction polynomiale non nulle car $\det(Q + iR) \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R$ est inversible et on peut conclure.

Exercice 39 : [énoncé]
On peut écrire
$$\Pi_f = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$$
et
$$E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda}$$
décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par f.
Pour chaque $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$,
$$\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda-1} \neq \ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda}$$
par minimalité de Π_f et donc il existe $x_\lambda\in\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda}\setminus\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda-1}$.
On peut alors établir que la famille $\left((f-\lambda\,\mathrm{Id})^k(x_\lambda)\right)_{0\le k\le\alpha_\lambda-1}$ est libre.
Considérons maintenant $x=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} x_\lambda$.
Pour $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(f)(x)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$ avec $P(f)(x_\lambda)\in\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})^{\alpha_\lambda}$ par stabilité.
Par décomposition en somme directe,
$$P(f)(x)=0 \iff \forall\lambda\in\mathrm{Sp}(f), P(f)(x_\lambda)=0$$
Par division euclidienne $P=(X-\lambda)^{\alpha_\lambda}Q+R$ avec $\deg R<\alpha_\lambda$ de sorte qu'on puisse écrire $R=\sum_{k=0}^{\alpha_\lambda-1} a_k(X-\lambda)^k$. On alors
$$P(f)(x_\lambda)=0 \iff \forall 0\le k<\alpha_\lambda, a_k=0$$
Ainsi
$$P(f)(x)=0 \iff \forall\lambda\in\mathrm{Sp}(f), (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}\mid P$$
Enfin puisque les termes $(X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$ sont premiers entre eux, on peut conclure
$$P(f)(x)=0 \iff \Pi_f\mid P$$

Exercice 40 : [énoncé]
Supposons f diagonalisable et soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de f.
Pour $1\le i,j\le n$, on pose $g_{i,j}$ l'endomorphisme de E déterminé par
$$g_{i,j}(e_k)=\delta_{j,k}e_i$$
La famille $(g_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ et on observe
$$T(g_{i,j})=(\lambda_i-\lambda_j)g_{i,j}$$
donc T est diagonalisable.
Supposons f nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n=0$. Puisque $T^p(g)$ est combinaison linéaire de termes de la forme $f^k\circ g\circ f^{p-k}$, il est assuré que $T^{2n}=0$ et donc que T est nilpotente.

Exercice 41 : [énoncé]
Rappelons qu'une matrice M carrée de taille n qui est nilpotente vérifie $M^n=O_n$ (l'ordre de nilpotence est au plus égal à la taille de la matrice). On a
$$\forall k\in\{0,\dots,n\}, (A+2^kB)^n=O_n$$
Considérons alors la matrice
$$(A+XB)^n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$
Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à n. Puisque $1,2,\dots,2^n$ sont $n+1$ racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit
$$A^n=O_n$$
car les coefficients constants sont nuls, et
$$B^n=O_n$$
car les coefficients des termes X^n sont aussi nuls.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Puisque $u^3=u$, par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que u est diagonalisable de valeurs propres possibles $0,1,-1$. Par les égalités $\mathrm{tr}\,u=0$ et $\mathrm{tr}\,u^2=2n$ on peut affirmer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$A=\begin{pmatrix} I_n & 0 & 0\\ 0 & -I_n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
Les matrices commutant avec A étant celle de la forme
$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0\\ 0 & N & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$
avec $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer
$$\dim C(u)=2n^2+1$$

(b) $\Pi_u=X^3-X$ donc $\dim\mathbb{R}[u]=3$ et par suite $C(u)=\mathbb{R}[u]$ si, et seulement si, $n=1$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Si $A^2 = A$ alors $f_A^2 = f_A$. f_A est une projection donc diagonalisable.

(b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe $P(f_A)\colon M \mapsto P(A)M$ de sorte que

$$P(f_A) = 0 \iff P(A) = 0$$

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Puisque H est un hyperplan et que $I_n \notin H$, on a

$$H \oplus \operatorname{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Soit A une matrice nilpotente. On peut l'écrire $A = B + \lambda I_n$ avec $B \in H$. La matrice B n'étant pas inversible, il existe une colonne X non nulle telle que $BX = O$ et alors $AX = \lambda X$. Le scalaire λ est une valeur propre de la matrice A. Or les seules valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles. On en déduit $\lambda = 0$ puis $A = B \in H$.

(b) Les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont nilpotentes car de carrées nulles ; elles sont donc toutes éléments de H et par combinaison linéaire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à H. Cependant celle-ci est notoirement inversible.

Exercice 45 : [énoncé]

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C$$

La matrice C annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que C est diagonalisable. Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc A et B sont diagonalisables.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) L'implication($\Longleftarrow$) est immédiate
($\Longrightarrow$) Par récurrence sur $n \geq 2$.
Cas $n = 2$
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

En posant $u = z_2/z_1$, on a alors (car $z_1 \neq 0$)

$$|1 + u| = 1 + |u|$$

En écrivant $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}_+$ et $b = 0$ ce qui permet d'écrire $z_2 = \alpha_2 z_1$ avec $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}_+$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Soient $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$ tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = (1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas $n = 2$ permet d'écrire

$$z_{n+1} = a\sum_{k=1}^{n} z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}_+$$

Récurrence établie.

(b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^n = I_n$ et $\operatorname{tr} M = n$ alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$) et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$ pour tout $k \geq 2$ avec $\alpha_k \geq 0$. Or tous les λ_k sont de module 1 donc les α_k sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut n, on peut conclure

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$$

et finalement $M = I_n$ car la matrice M est semblable à I_n.
La réciproque est immédiate.

Exercice 47 : [énoncé]
Cas $n = 1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \,|\, x_j\right) < 0$$

Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.
$(x_2 \,|\, x_1) < 0$ et $(x_3 \,|\, x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors $(x_2 \,|\, x_3) = \lambda\mu \|x_1\|^2 > 0$!
Cas $n = 2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_4$ tels que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \,|\, x_j\right) < 0$$

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
On

$$\forall i \neq j \geq 2, \left(x_i \,|\, x_j\right) = \lambda_i \lambda_j + \left(y_i \,|\, y_j\right) < 0$$

donc $\left(y_i \,|\, y_j\right) < 0$.
y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_{n+3}$ tels que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \,|\, x_j\right) < 0$$

à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n + 1$.
x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
On a

$$\forall i \neq j \geq 2, \left(x_i \,|\, x_j\right) = \lambda_i \lambda_j + \left(y_i \,|\, y_j\right) < 0$$

donc $\left(y_i \,|\, y_j\right) < 0$.
$y_2, ..., y_{n+3}$ se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^\perp$ qui est de dimension n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Récurrence établie.

Exercice 48 : [énoncé]
En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0\,;1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f \,|\, g) = \int_0^1 t^2 f(t) g(t) \,\mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f : t \mapsto \ln t$ et $F = \operatorname{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.
$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f) \mid f_0) = (f \,|\, f_0)$ et $(p(f) \mid f_1) = (f \,|\, f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.
$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) \mid f) = 1/432$.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie
$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\,,\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\,,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive
$$\forall t \in [0\,;+\infty[,\ P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$$
On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

(b) Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux car
$$P_k' \in \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1})$$
Par une intégration par parties
$$0 = \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
On en déduit
$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

(c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire
$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q\rangle\, P_k$$
Or
$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\,\langle 1, Q\rangle$$
Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient
$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\,\langle 1, Q\rangle$$
ce qui permet d'écrire
$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q\rangle \neq 0$$
On en déduit
$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
Enfin par Pythagore
$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$
et l'on obtient
$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 50 : [énoncé]

Si p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F alors
$$\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$$
avec $p(x) \perp (x - p(x))$. Par le théorème de Pythagore
$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$
Inversement, soit p une projection telle que
$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$
Puisque p est une projection, les espaces $F = \mathrm{Im}\, p$ et $G = \ker p$ sont supplémentaires et p est la projection sur F parallèlement à G. Il s'agit alors de montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.
Soient $u \in F, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le vecteur
$$x = u + \lambda.v$$
On a $p(x) = u$ et $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ ce qui donne
$$0 \leq 2\lambda\,(u\,|\,v) + \lambda^2\,\|v\|^2$$
Ceci valant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $(u\,|\,v) = 0$.
En effet, si $(u\,|\,v) \neq 0$ alors
$$2\lambda\,(u\,|\,v) + \lambda^2\,\|v\|^2 \underset{\lambda\to 0}{\sim} 2\lambda\,(u\,|\,v)$$
ce qui est une expression qui change de signe.
Ainsi les espaces F et G sont orthogonaux et p est donc une projection orthogonale.

Exercice 51 : [énoncé]

(a) Il est bien connu que l'application

$$(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. L'application $P\mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ donc il existe un unique polynôme $A\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec A, ce qui revient à dire

$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X], P(0)=\langle A,P\rangle=\int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Si par l'absurde le degré de A est strictement inférieur à n alors $P=XA$ est élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t=P(0)=0$$

Or la fonction $t\mapsto tA(t)^2$ est continue positive sur $[0\,;1]$ et la nullité de l'intégrale précédente entraîne alors

$$\forall t\in[0\,;1], tA(t)^2=0$$

On en déduit $A=0$ ce qui est absurde.

Exercice 52 : [énoncé]
Cas $a=b$:
$f(x)=(a\,|\,x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en a.
Cas $a=-b$:
$f(x)=-(a\,|\,x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en 0.
Cas restants :
Les vecteurs $a+b$ et $a-b$ constituent une famille orthogonale.
Posons

$$e_1=\frac{a+b}{\|a+b\|}, e_2=\frac{a-b}{\|a-b\|}$$

Les vecteurs e_1 et e_2 forment une famille orthonormale que le peut compléter en une base orthonormale $(e_i)_{1\le i\le n}$.
Pour x tel que $\|x\|\le 1$, on peut écrire

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n \text{ avec } x_1^2+\dots+x_n^2\le 1$$

et alors

$$(a\,|\,x)=x_1\frac{1+(a\,|\,b)}{\|a+b\|}+x_2\frac{1-(a\,|\,b)}{\|a-b\|}$$

puis

$$f(x)=x_1^2\left(\frac{1+(a\,|\,b)}{\|a+b\|}\right)^2-x_2^2\left(\frac{1-(a\,|\,b)}{\|a+b\|}\right)^2$$

Le maximum cherché est pour $x_1=1$ et $x_2=\ldots=x_n=0$. Il vaut

$$\left(\frac{1+(a\,|\,b)}{\|a+b\|}\right)^2$$

Cette formule convient aussi pour les cas initialement isolés.

Exercice 53 : [énoncé]
Montrons maintenant la propriété demandée en raisonnant par récurrence sur la taille $n\in\mathbb{N}^*$ de la matrice.
Cas $n=1$:
C'est immédiat.
Cas $n=2$:
Si la matrice

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

commute avec sa transposée alors

$$b^2=c^2 \text{ et } (a-d)(b-c)=0$$

Si $b=c$ alors M est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.
Sinon $b=-c$ avec $b\neq 0$ puis $a=d$. La matrice M s'écrit alors

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$$

Supposons la propriété établie aux rangs $n-1$ et n avec $n\ge 2$.
Soit $M\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ commutant avec sa transposée. Introduisons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ canoniquement associé à M. Commençons par montrer qu'il existe une droite ou un plan vectoriel stable par u. Soit P un polynôme annulateur unitaire de u (par exemple son polynôme caractéristique). On peut factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ pour écrire

$$P=P_1P_2\ldots P_m$$

avec $P_1,P_2,\ldots,P_m$ polynômes irréductibles unitaires (pas nécessairement distincts).
Puisque $\ker P(u)=E$, l'endomorphisme $P_1(u)\circ P_2(u)\circ\ldots\circ P_m(u)$ est nul et par conséquent non injectif. Il existe alors $k\in[\![1\,;m]\!]$ tel que $P_k(u)$ est non injectif.
Considérons $x\neq 0_E$ dans $\ker P_k(u)$.

Si $\deg P_k = 1$ alors $P_k = X - \lambda$ et x est vecteur propre de u. La droite $F = \text{Vect}(x)$ est alors stable par u.
Si $\deg P_k = 2$ alors $P_k = X^2 + pX + q$ (avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$) et le plan $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est alors stable par u.
Introduisons une base orthonormée adaptée au sous-espace vectoriel F, la matrice de u dans cette base est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Les matrices M et N sont orthogonalement semblables ce qui permet d'écrire

$$M = PNP^{-1} = PN{}^tP \text{ avec } P \in O_n(\mathbb{R})$$

L'identité ${}^tMM = M{}^tM$ donne alors ${}^tNN = N{}^tN$. Or

$${}^tNN = \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix} \text{ et } N{}^tN = \begin{pmatrix} A{}^tA + B{}^tB & B{}^tC \\ C{}^tB & C{}^tC \end{pmatrix}$$

On en déduit

$${}^tAA = A{}^tA + B{}^tB$$

puis en considérant la trace

$$\text{tr}\left({}^tAA\right) = \text{tr}\left(A{}^tA\right) + \text{tr}\left(B{}^tB\right)$$

Or en exploitant l'identité $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, on obtient

$$\text{tr}({}^tBB) = 0$$

Mais on reconnaît ici le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $B = 0$.
Ainsi la matrice N est finalement de la forme

$$N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec A et C vérifiant ${}^tAA = A{}^tA$ et ${}^tCC = C{}^tC$.
Il suffit ensuite d'appliquer l'étude de cas initiale au bloc A et l'hypothèse de récurrence au bloc C pour établir que N (et donc aussi M) est orthogonalement semblable à une matrice de la forme proposée.
Récurrence établie.

Exercice 54 : [énoncé]

(a) Puisque A et ${}^tA$ commutent, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^pA^p = 0$ et donc ${}^tAA$ est nilpotente.
D'autre part, la matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Étant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc ${}^tAA$ est nulle car semblable à la matrice nulle.

(b) En exploitant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = (AA \models) \,\text{tr}\left({}^tAA\right) = 0$$

et donc $A = 0$

Exercice 55 : [énoncé]
Puisque les valeurs propres de u sont strictement positives, on montre par orthodiagonalisation

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x\rangle > 0$$

Soit $x \in E$.
Si $x = 0_E$, l'inégalité demandée est évidente et c'est même une égalité.
Si $x \neq 0_E$, considérons $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\left\langle u\left(x + \lambda u^{-1}(x)\right) \mid x + \lambda u^{-1}(x)\right\rangle \geq 0$$

donc en développant

$$\lambda^2 \left\langle x, u^{-1}(x)\right\rangle + 2\lambda \langle x, x\rangle + \langle u(x), x\rangle \geq 0$$

Or $\left\langle x, u^{-1}(x)\right\rangle = \left\langle u(u^{-1}(x)), u^{-1}(x)\right\rangle > 0$, par suite, le discriminant

$$\Delta = 4\,\|x\|^4 - 4\,\langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle$$

est négatif ou nul car sinon le trinôme en λ précédent posséderait deux racines et ne serait donc pas de signe constant.
On en déduit l'inégalité proposée.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $x + \lambda u^{-1}(x) = 0_E$ *i.e.* si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

Exercice 56 : [énoncé]
Soit M solution. $M^4 = {}^t(M^2) = M$ donc $X^4 - X$ est annulateur de M et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de M, $X^3 - 1$ puis $X^2 + X + 1$ sont annulateurs de M.
Ainsi, on peut affirmer $M^3 = {}^tMM = I$ (ainsi $M \in O_n(\mathbb{R})$) et $M^2 + M + I = 0$.
Pour $X \neq 0$, $P = \text{Vect}(X, MX)$ est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par M (car $M^2 = -M - I$). La restriction de M à ce plan est un automorphisme orthogonal

sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle $\pm 2\pi/3$ car $M^3 = I_n$. De plus ce plan est aussi stable par $M^2 = {}^tM$ donc $P^\perp$ est stable par M ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$. Au final, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 57 : [énoncé]

(a) ${}^tA = -A$ donne $\det A = (-1)^n \det A$ donc $\det A = 0$ si n est impair.

(b) Si λ est valeur propre réelle de A alors on peut écrire $AX = \lambda X$ pour une certaine colonne X non nulle. On a alors ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ mais aussi ${}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX$. On en déduit que la seule valeur propre réelle de A possible est la valeur nulle.
Par l'absurde, si $\det A < 0$ alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que le polynôme caractéristique de A s'annule ailleurs qu'en 0. C'est contraire à l'affirmation qui précède.
Ainsi $\det A \geq 0$ avec inégalité stricte si, et seulement si, A est inversible.

Exercice 58 : [énoncé]
Soit $Y \in \ker A \cap \operatorname{Im} A$. On peut écrire $Y = AX$ pour une certaine colonne X.
On a

$${}^tYY = {}^t(AX)Y = -{}^tXAY = 0$$

et donc $Y = 0$.
En sus,

$$\operatorname{rg} A + \dim \ker A = n$$

et donc les espaces $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$ sont supplémentaires.
Puisque l'espace $\operatorname{Im} A$ est évidemment stable, on obtient que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice A est égale par similitude au rang de la matrice C mais aussi par construction à la taille de C. On en déduit que la matrice C est inversible.
Enfin, si λ est valeur propre réelle de A de vecteur propre $X \neq 0$ on a

$${}^tXAX = \lambda X \text{ et } {}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX$$

On en déduit que seule 0 peut être valeur propre réelle de A. La matrice C n'a donc pas d'autre valeur propre que 0, or elle est inversible, elle n'admet donc pas de valeur propre. Elle est alors nécessairement de taille paire.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Posons

$$U_p = \frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$$

On a

$$(I - A)U_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}) \to 0$$

car pour la norme euclidienne

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}$$

Puisque $1 \notin \operatorname{Sp} A$, $U_p \to 0$.

(b) Par l'absurde si A^p converge vers B alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^{p+1}X = AA^pX$ donne à la limite $BX = ABX$. Or $1 \notin \operatorname{Sp} A$ donc $BX = 0$ et puisque ceci vaut pour tout X, $B = 0$.
Or $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\to 0$. Absurde.
La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 60 : [énoncé]
Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout x, y vérifiant $\|x\| = \|y\|$, on a $x + y$ et $x - y$ orthogonaux donc $f(x) + f(y)$ et $f(x) - f(y)$ aussi. Par suite $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.
Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite $f = \lambda g$ avec $g \in O(E)$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 61 : [énoncé]
r est une rotation, définissons D son axe (droite vectorielle orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$) et θ son angle.
Dans une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour $x \in E$,
$$(s \circ r \circ s)(s(x)) = s(r(x))$$
Dans la base orthonormée $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ de E, un calcul direct donne que la matrice de $s \circ r \circ s$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Si $\det s = 1$, la famille $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ est directe et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $s(\vec{u})$ et d'angle θ.
Si $\det s = -1$, la famille $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ est indirecte et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $s(\vec{u})$ et d'angle $-\theta$.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Posons $f : M \mapsto \Omega M$. $(f(M) \mid f(N)) = \operatorname{tr}({}^t M {}^t\Omega\Omega N)$.
f est φ-orthogonale si, et seulement si, pour tout $M, N \in \mathcal{M}$, $(M|{}^t\Omega\Omega N) = (M|N)$ *i.e.* pour tout $N \in \mathcal{M}$, ${}^t\Omega\Omega N = N$ *i.e.* ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
Ainsi f est φ-orthogonale si, et seulement si, Ω l'est.

Exercice 63 : [énoncé]
Si A est diagonale égale à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ alors
$$\operatorname{tr}(AU) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{i,i}$$
Or les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1\,;1]$ donc
$$\operatorname{tr}(AU) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$$
Plus généralement, si A est symétrique réelle à valeurs propres positives, on peut écrire $A = {}^t VDV$ avec V orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. On a alors
$$\operatorname{tr}(AU) = \operatorname{tr}\left({}^t VDVU\right) = \operatorname{tr}(DW)$$
avec $W = VU{}^tV$ orthogonale. On a alors
$$\operatorname{tr}(AU) \le \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} A$$
L'étude de $\operatorname{tr}(UA)$ est analogue.

Exercice 64 : [énoncé]
On a
$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(u)) = -g(u)$$
et pour $g(v) \perp g(u)$,
$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(v)) = g(v)$$
Ainsi $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la réflexion par rapport à $g(u)^{\perp}$.

Exercice 65 : [énoncé]
$J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant $AX = -JX$.
On a alors ${}^tAJX = -X$ et donc $-1 \in \operatorname{Sp}({}^tAJ) = \operatorname{Sp}(JA)$ avec une réciproque immédiate.
Le polynôme caractéristique de JA étant
$$X^{n-1}(X - \sum_{i,j} a_{i,j})$$
on obtient le critère
$$J + A \text{ est inversible si, et seulement si, } \sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1$$

Exercice 66 : [énoncé]
Supposons (i) et (ii).
Pour $x \in E$, on a
$$(f(x)\,|\,x) = -\left(f(x)\,|\,f^2(x)\right) = -(x\,|\,f(x))$$
et donc
$$(f(x)\,|\,x) = 0$$
Supposons (ii) et (iii)
Le vecteur $x + f(x)$ et son image par f sont orthogonaux donc
$$(x + f(x)\,|\,f(x + f(x))) = (x + f(x)\,|\,f(x) - x) = 0$$
puis $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$. Ainsi f est une isométrie.
Supposons (i) et (iii)
Pour tous vecteurs x et y
$$\left(f^2(x) + x\,|\,f(y)\right) = (f(x)\,|\,y) + (x\,|\,f(y))$$
Or
$$(f(x+y)\,|\,x+y) = (f(x)\,|\,y) + (f(y)\,|\,x) = 0$$

donc

$$\left(f^2(x)+x\,|\,f(y)\right)=0$$

Puisque f est surjective, $f^2(x)+x=0_E$.

Exercice 67 : [énoncé]

M est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de X^p-1, elles ne peuvent donc qu'être 1 ou -1. Par suite $M^2=I_n$.

Exercice 68 : [énoncé]

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donné par

$$(A\,|\,B)=\operatorname{tr}({}^tAB)$$

(a) L'espace solution est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En effet, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux car pour $(A,B)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ on a

$$(A\,|\,B)=\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)=\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$$

et

$$(A\,|\,B)=(B\,|\,A)=\operatorname{tr}\left({}^tBA\right)=-\operatorname{tr}(BA)$$

donc $(A\,|\,B)=0$.
Les espaces étant orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Puisque de plus on peut écrire n'importe quelle matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M=A+B$ avec

$$A=\frac{M+{}^tM}{2}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\text{ et }B=\frac{M-{}^tM}{2}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux et donc chacun est l'orthogonale de l'autre.
car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.

(b) On a

$${}^t\exp(xB)\exp(xB)=\exp({}^t(xB))\exp(xB)=\exp(-xB)\exp(xB)$$

Or $-xB$ et xB commutent donc

$${}^t\exp(xB)\exp(xB)=\exp(-xB+xB)=\exp(0)=I_n$$

(c) La fonction dérivable $f\colon x\mapsto\operatorname{tr}(A\exp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0)=0$ ce qui donne $\operatorname{tr}(AB)=0$ pour tout $B\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est une matrice symétrique car dans l'orthogonal de l'espace des matrices antisymétrique.
Par le théorème spectrale, on peut écrire $A={}^tPDP$ avec $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $P\in O_n(\mathbb{R})$.
Posons $V=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i=\pm1$ et $\varepsilon_i\lambda_i=|\lambda_i|$.
Considérons alors $U=PV{}^tP\in O_n(\mathbb{R})$.

$$\operatorname{tr}(AU)=\operatorname{tr}(APV{}^tP)=\operatorname{tr}({}^tPAPV)=\operatorname{tr}(DV)=|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|$$

et

$$\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\dots+\lambda_n$$

La propriété $\operatorname{tr}(AU)\le\operatorname{tr}A$ entraîne $\lambda_i\ge0$ pour tout i.
La matrice A est alors symétrique positive.

(d) Supposons $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire $A={}^tPDP$ avec $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i\ge0$ et $P\in O_n(\mathbb{R})$. Pour tout $U\in O_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AU)=\operatorname{tr}(DV)$ avec $V=(v_{i,j})={}^tPUP\in O_n(\mathbb{R})$.
On a alors

$$\operatorname{tr}(DV)=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_{i,i}\le\sum_{i=1}^n\lambda_i=\operatorname{tr}(A)$$

car $v_{i,i}\le1$.

(e) L'application réelle $f\colon V\to\operatorname{tr}(MV)$ est continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum en un certain $U\in O_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout $V\in O_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(MV)\le\operatorname{tr}(MU)$$

Posons alors $A=MU$. Pour tout $W\in O_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AW)\le\operatorname{tr}A$$

donc $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M=AU^{-1}$ avec $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 69 : [énoncé]

f et g sont des rotations vectorielles et puisque $f\ne g$, on peut supposer, quitte à échanger, que $f\ne\mathrm{Id}$.
Si u dirige l'axe de f alors $f(g(u))=g(f(u))=g(u)$ donc $g(u)$ appartient à l'axe de f puis $g(u)=\lambda u$. Or g est une isométrie donc $g(u)=\pm u$. Si $g(u)=u$ alors g est une rotation de même axe que f. Si $g(u)=-u$ alors v un vecteur unitaire de l'axe de la rotation g. On a $(u\,|\,v)=(g(u)\,|\,g(v))=(-u\,|\,v)=-(u\,|\,v)$ donc $(u\,|\,v)=0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. De plus, puisque $u\in\{v\}^\perp$ et $g(u)=-u$, g est un demi-tour et il en est de même pour f.

Exercice 70 : [énoncé]
Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t AA$.
La matrice ${}^t AA$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

Exercice 71 : [énoncé]
Soit M solution, M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec pour valeurs propres j et j^2.
Puisque $\operatorname{tr} M$ est réel, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité. Par suite n est pair, $n = 2p$.
Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur p qu'il existe une matrice orthogonale P tel que

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$$

avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}$$

Pour $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$${}^t MM = M {}^t M \iff \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

Si $b = c$ alors M est symétrique donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas le cas.
Il reste $b = -c$ et donc $a = d$.
Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et la relation $M^2 + M + I = 0$ donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure (car le cas $b = 0$ est à exclure).
Supposons la propriété établie au rang $n = 2p$ et étudions le rang $n = 2p + 2$.
Soit M une matrice solution.
La matrice $S = {}^t M + M$ est symétrique et donc il existe $X \neq 0$ tel que $SX = \lambda X$.
On observe alors que l'espace $F = \operatorname{Vect}(X, MX)$ est stable par M et par ${}^t M$. Par suite $F^\perp$ est aussi stable par M et ${}^t M$. On peut alors appliquer l'étude menée pour $n = 2$ à l'action de M sur F et l'hypothèse de récurrence à celle sur $F^\perp$.
Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi obtenues sont bien solutions.

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne propre associée.
D'une part ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}X$, d'autre part ${}^t\bar{X}AX = {}^t\overline{AX}X = -\bar{\lambda} {}^t\bar{X}X$.
Puisque ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \operatorname{Sp} A$.
${}^t\Omega\Omega = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ or $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ (car $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$.
Ainsi l'application $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \{\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \operatorname{Sp}(\Omega)\}$ est bien définie.
Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$. En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.
Enfin soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \operatorname{Sp}(\Omega)$.
Posons $A = (\Omega + I_n)^{-1}(I_n - \Omega)$ qui est bien définie car $-1 \notin \operatorname{Sp} \Omega$.
On a
${}^t A = (I_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + I_n)^{-1} = (\Omega - I_n)\Omega^{-1}\Omega(I_n + \Omega)^{-1} = (\Omega - I_n)(I_n + \Omega)^{-1} = -A$ et $\varphi(A) = \Omega$.
Finalement φ est bijective.

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de M_u.
Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$$

On a alors

$$\forall 1 \leq i \leq p, \left(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid u_i\right) = 0$$

et donc

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$$

La matrice M_u n'est alors pas inversible.
Inversement, supposons la matrice M_u non inversible.
Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$$

et donc
$$\forall 1 \leq i \leq p, \left(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \,|\, u_i\right) = 0$$
Ainsi
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^\perp$$
or
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$$
donc
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$$
et la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

(b) Posons $r = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$, supposons que les r premiers vecteurs de la famille u sont indépendants. On permute de la même façon les vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$ et ainsi l'hypothèse $M_u = M_v$ est conservée. Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les r premiers vecteurs de la famille v sont indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.
Considérons alors l'application linéaire $h\colon \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r) \to \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ déterminée par
$$\forall 1 \leq k \leq r, h(u_k) = v_k$$
Pour tout $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$, on a par construction $h(x) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.
Or
$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j \left(u_i \,|\, u_j\right) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j \left(v_i \,|\, v_j\right)$$
et puisque $\left(u_i \,|\, u_j\right) = \left(v_i \,|\, v_j\right)$, on obtient
$$\|x\|^2 = \|h(x)\|^2$$
L'application h conserve donc la norme
Pour tout $k \in \{r+1, \ldots, p\}$, u_k est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_r$ ce qui permet d'écrire
$$u_k = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$$
On a alors pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,
$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r) \mid u_i) = 0$$
et donc
$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) \mid v_i) = 0$$
On en déduit $v_k = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_r$ puis $v_k = h(u_k)$.
Enfin, on prolonge h en un automorphisme orthogonal solution défini sur $\mathbb{R}^n$ en introduisant une application linéaire transformant une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)^\perp$ en une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)^\perp$

Exercice 74 : [énoncé]
$\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J)\colon x_1 + \cdots + x_n = 0$ et $E_n(J)\colon x_1 = \ldots = x_n$.
Les matrices
$$D = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$$
et
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -2/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ & & & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ 1/\sqrt{n} & (0) & & & -(n-1)/\sqrt{n^2-n} \end{pmatrix}$$
conviennent.
Les colonnes d'indices 2 à n de la matrice P sont formées de coefficients de $a, \ldots a, b, 0, \ldots, 0$ de somme nulle et de somme de carrés égale à 1.

Exercice 75 : [énoncé]
Cas A diagonale :
On écrit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. On a
$$AB + BA = \left((\lambda_i + \lambda_j) b_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$
et donc
$$\forall 1 \leq i, j \leq n, (\lambda_i + \lambda_j) b_{i,j} = 0$$
Si $\lambda_i \neq 0$ alors $\lambda_i + \lambda_j > 0$ et donc $b_{i,j} = 0$ puis $\lambda_i b_{i,j} = 0$.
Sinon, on a encore $\lambda_i b_{i,j} = 0$.
Ainsi $AB = 0$ puis aussi $BA = 0$.
Cas général :
Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coefficients diagonaux positifs et $P \in O_n(\mathbb{R})$.
La relation $AB + BA = 0$ donne alors $DM + MD = 0$ avec $M = P^{-1}BP$. Comme au dessus, on obtient $DM = 0$ puis
$$AB = PDP^{-1}PMP^{-1} = 0$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) ${}^tA = A^2$ donne aussi $A = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^4$. Or A est inversible donc $A^3 = I_n$.
Enfin ${}^tAA = A^3 = I_n$ et donc A est orthogonale.

(b) L'endomorphisme induit par f sur le noyau de $f^2+f+\mathrm{Id}$ est représentable par une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M+I_p=O_p$. Cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ avec les deux valeurs propres complexes j et $j^2=\bar{j}$. Celles-ci ont même multiplicité m et donc $p=\dim\ker(f^2+f+\mathrm{Id})=2m$ est un entier pair. De plus M est alors semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec des blocs diagonaux $\mathrm{diag}(j,j^2)$. Or la matrice de rotation

$$\Omega=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3)\\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3)\end{pmatrix}$$

est aussi semblable à la matrice $\mathrm{diag}(j,j^2)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
En raisonnant par blocs, on obtient que la matrice M est semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux Ω. Or ces deux matrices sont réelles et il est « bien connu » que deux matrices réelles semblables sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ le sont aussi sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Enfin, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\mathbb{R}^n=\ker(f-\mathrm{Id})\oplus\ker(f^2+f+\mathrm{Id})$$

et dans une base adaptée à cette décomposition, on obtient que f peut être représenté par une matrice de la forme

$$\mathrm{diag}(1,\dots,1,\Omega,\dots,\Omega)$$

Exercice 77 : [énoncé]
La matrice A est diagonalisable semblable à

$$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Posons $C=D^3+D+I_n$. En montrant que D est un polynôme en C *i.e.* $D=P(C)$ on vérifie par similitude que A est un polynôme en B à savoir $A=P(B)$.
On a

$$C=\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n) \text{ avec } \mu_i=\lambda_i^3+\lambda_i+1$$

On vérifie aisément que la fonction $x\mapsto x^3+x+1$ est injective sur $\mathbb{R}$. Ainsi les μ_i égaux correspondent aux λ_i égaux et inversement ce qui permet de considérer un polynôme interpolateur construit de sorte que

$$\forall 1\le i\le n, P(\mu_i)=\lambda_i$$

On vérifie alors $P(C)=D$ et l'on conclut.

Exercice 78 : [énoncé]
On a

$$A^7=A^4\times(A^tA)=A^{5t}A$$

puis

$$A^7=A^3\left({}^tA\right)^2=A\left({}^tA\right)^3=A^t\left(A^tA\right)=A^{2t}A=A^4$$

Ainsi $X^7-X^4=X^4(X^3-1)$ annule A.
Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4=\ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3-1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidement $\ker A\subset\ker A^4$. Inversement, soit $X\in\ker A^4$. On a

$$A^tAAX=A^4X=0$$

donc

$$\left\|{}^tAAX\right\|^2={}^tX^tAA^tAAX=0$$

et par conséquent ${}^tAAX=0$. Alors

$$\|AX\|^2={}^tX^tAAX=0$$

et donc $AX=0$. Ainsi $\ker A^4\subset\ker A$ puis l'égalité.