Nombres réels et complexes

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02092] [Correction]
Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 [02093] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 3 [02094] [Correction]
Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a, b > 0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 [02095] [Correction]
Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.

(b) Calculer $f(0)$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.

(d) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.

(e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 5 [02472] [Correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 6 [02475] [Correction]
Si n est un entier ≥ 2, le rationnel $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ peut-il être entier ?

Exercice 7 [02647] [Correction]

(a) Montrer l'existence et l'unicité des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

(b) Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 [01975] [Correction]
[Irrationalité de π]

(a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

(b) Établir la même propriété en $x = a/b$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t \,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$.

(d) En supposant $\pi = a/b$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 9 [03668] [Correction]
[Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$]

(a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

(b) Établir la même propriété en $x = a/b$

(c) On pose $r = a/b$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^r P_n(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$.

(d) En supposant $\mathrm{e}^r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Les nombres réels

Exercice 10 [02098] [Correction]
Soit $a \in [1\,;+\infty[$. Simplifier
$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

Exercice 11 [02099] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application telle que :
$$\begin{aligned}&\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y);\\&\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)f(y);\\&\exists x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0.\end{aligned}$$

(a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
(b) Déterminer $f(x)$ pour $x\in\mathbb{Z}$ puis pour $x\in\mathbb{Q}$.
(c) Démontrer que $\forall x\geq 0, f(x)\geq 0$. En déduire que f est croissante.
(d) Conclure que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 [03404] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. On suppose
$$\sum_{k=1}^n x_k=\sum_{k=1}^n x_k^2=n$$
Montrer que pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $x_k=1$.

Inégalités

Exercice 13 [03983] [Correction]
Vérifier
$$\forall x\in\mathbb{R}, x(1-x)\leq 1/4$$

Exercice 14 [02096] [Correction]
Montrer
$$\forall a,b\in\mathbb{R}, ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

Exercice 15 [03643] [Correction]
Soient $x,y\in[0\,;1]$. Montrer
$$x^2+y^2-xy\leq 1$$

Exercice 16 [02097] [Correction]
Montrer
$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}, ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$$

Exercice 17 [03224] [Correction]
Montrer
$$\forall u,v\geq 0, 1+\sqrt{uv}\leq\sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$$

Exercice 18 [03405] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1\leq\dots\leq a_n$ et $b_1\leq\dots\leq b_n$ des réels.
Établir
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_kb_k$$

Exercice 19 [01733] [Correction]
Déterminer tous les couples $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ pour lesquels il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall x,y>0, x^\alpha y^\beta\leq M(x+y)$$

Exercice 20 [03640] [Correction]
Soient $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right)\text{ et }\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k$$

Exercice 21 [04017] [Correction]
Montrer que
$$\forall x,y\in[0\,;1], \min\{xy,(1-x)(1-y)\}\leq\frac{1}{4}$$

Partie entière

Exercice 22 [02100] [Correction]
Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 23 [02101] [Correction]
Montrer
$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Exercice 24 [02102] [Correction]
Montrer
$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$$

Exercice 25 [02103] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer
$$\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$$

Exercice 26 [02104] [Correction]
Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

Exercice 27 [02105] [Correction]
Soit $a\leq b\in\mathbb{R}$. Établir
$$\mathrm{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z})=\lfloor b\rfloor+\lfloor 1-a\rfloor$$

Exercice 28 [02106] [Correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que
$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}\text{ et }3b_n^2=a_n^2-1$$

(b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 29 [03416] [Correction]
Démontrer
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$
en notant $\lfloor x\rfloor$ la partie entière d'un réel x.

Les nombres complexes

Exercice 30 [02025] [Correction]
Soit $z\in U\setminus\{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$.

Exercice 31 [02026] [Correction]
Soient $P=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$, $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ et $f:\mathbb{C}\setminus\{-i\}\to\mathbb{C}$ définie par
$$f(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

(a) Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.

(b) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 32 [02028] [Correction]
Calculer pour $\theta\in\,]0\,;2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}$,
$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)\text{ et }S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$$

Exercice 33 [02029] [Correction]
Calculer pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$,
$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)\text{ et }S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$$

Exercice 34 [03107] [Correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z\in B$ alors $1-z+z^2\in B$ et $1+z+z^2\in B$.
Déterminer B.

Exercice 35 [03651] [Correction]
Soient a,b,z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer
$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2\in\mathbb{R}_+^*$$

Le plan complexe

Exercice 36 [03458] [Correction]
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$.
On note C le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.

(a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in C \iff |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

(b) En déduire que l'image de C par l'application $f : z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera centre et rayon en fonction de z_0 et r.

Exercice 37 [02027] [Correction]

(a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.

(b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 38 [03040] [Correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 39 [02050] [Correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

Exercice 40 [03880] [Correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

Module et argument

Exercice 41 [02030] [Correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 42 [02031] [Correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$\left|z + z'\right| = |z| + \left|z'\right| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda.z$$

Exercice 43 [02032] [Correction]
Établir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + \left|z'\right| \leq \left|z + z'\right| + \left|z - z'\right|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 44 [02356] [Correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 45 [00055] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$$

Exercice 46 [03642] [Correction]

(a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 47 [03249] [Correction]
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}$$

Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 48 [02052] [Correction]
Résoudre l'équation $|z + 1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Racines de l'unité

Exercice 49 [02036] [Correction]
Calculer le produit des n-ième racines de l'unité

Exercice 50 [02037] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.
Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|$$

Exercice 51 [03353] [Correction]
Soient $n \geq 3$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p$$

(b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

Exercice 52 [02038] [Correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$$

En calculant $(1 - \omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 53 [02039] [Correction]
Simplifier :

(a) $j(j+1)$ (b) $\frac{j}{j^2+1}$ (c) $\frac{j+1}{j-1}$

Exercice 54 [02040] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 55 [02041] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0$$

Exercice 56 [02042] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$$

Observer que celle-ci admet exactement $n - 1$ solutions, chacune réelle.

Exercice 57 [02043] [Correction]
Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 58 [02044] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2\mathrm{i}\pi/n)$.

(a) Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

(b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

(c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 59 [02531] [Correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Équations algébriques

Exercice 60 [02045] [Correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?
Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 61 [02046] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$

(b) $z^4 - (5 - 14\mathrm{i})z^2 - 2(12 + 5\mathrm{i}) = 0$.

Exercice 62 [02047] [Correction]

(a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12\mathrm{i}$.

(b) Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2\mathrm{i})z^2 + 3(1 + \mathrm{i})z - 10(1 + \mathrm{i}) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.

(c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 63 [02049] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$$

Exercice 64 [02048] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + \mathrm{i} \\ xy = 2 - \mathrm{i} \end{cases}$$

Exponentielle complexe

Exercice 65 [02051] [Correction]
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 66 [03457] [Correction]
En étudiant module et argument, établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$$

Exponentielles imaginaires

Exercice 67 [02033] [Correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 68 [02034] [Correction]
Simplifier $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$ pour $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$.

Exercice 69 [02035] [Correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 70 [02646] [Correction]
Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 0$$

montrer

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 0$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit x un rationnel et y un irrationnel.
Par l'absurde : Si $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels. Or y est irrationnel. Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.
On a alors $2q^2 = p^2$.
p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.
Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est gagné avec $a = b = \sqrt{2}$. Sinon, on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) La relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.

(b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.

(c) Pour $y = -x$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.

(d) Par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$$
Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$$

(e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$$
or
$$a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$$
donc
$$f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$$
puis
$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax$$

Exercice 5 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié

```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```

Attention à définir les racines cubiques par des exposants $1/3$ avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée

```
evalf(x);
```

Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3

```
expand(x^3);
```

Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Simplifions ce terme

```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);
```

On obtient

$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Développons selon $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```

donne 9261. Enfin

```
ifactor(9261);
```

permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}$$

Ainsi x est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x$$

En factorisant le polynôme sous-jacent

```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```

on obtient

$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0$$

Puisque $3x^2 + 4x + 3 > 0$, on peut conclure

$$x = 4/3$$

Exercice 6 : [énoncé]

Le calcul des premiers termes de la suite $(H_n)_{n\geq 2}$ permet de conjecturer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Ceci assurera $H_n \notin \mathbb{Z}$.

Démontrons la propriété conjecturée par récurrence forte.

Pour $n = 2$, c'est immédiat.

Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n - 1 \geq 2$.

Cas n impair.

On peut écrire $n = 2k + 1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p + 1)/2q$, on obtient $H_n = H_{n-1} + 1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair.

Cas n est pair.

On peut écrire $n = 2k$ avec $k \geq 2$ puis

$$H_n = \frac{1}{2}H_k + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$$

Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.

De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété.

Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair.

Récurrence établie.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Par la formule du binôme de Newton

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impaires

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

avec les entiers

$$a_n = \sum_{0\leq 2p\leq n} \binom{n}{2p} 2^p \text{ et } b_n = \sum_{0\leq 2p+1\leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

On peut aussi raisonner par récurrence en mettant à jour une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

L'unicité provient de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En effet si

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

avec a, b, a', b' entiers, on obtient

$$(b' - b)\sqrt{2} = a - a'$$

Si $b \neq b'$ alors on peut exprimer $\sqrt{2}$ comme égal à un nombre rationnel. C'est absurde et il reste $b = b'$ et donc $a = a'$.

(b) Par la formule du binôme de Newton, on obtient de même

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - \sqrt{2}b_n$$

et alors

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n$$

On peut aussi raisonner par récurrence en exploitant l'expression de (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n).

(c) L'unicité est évidente compte tenu de la stricte croissance de la fonction $p \mapsto \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.

Si n est pair alors $a_n^2 = 1 + 2b_n^2$. Pour $p = a_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Si n est impair alors $2b_n^2 = a_n^2 + 1$. Pour $p = 2b_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{2}b_n + a_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$.
En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}$$

(b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

(c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^{\pi} t^n(bt-a)^n \sin t \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n!}\pi^{n+1}(|b|\pi + |a|)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(d) Par l'absurde, supposons $\pi = a/b$.
Par intégration par parties successives

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sin(t+k\pi/2)P_n^{(k-1)}(t)\right]_0^{\pi} + (-1)^m\int_0^{\pi}\sin(t+m\pi/2)P_n^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}\sin(t+k\pi/2)P_n^{(k-1)}(t)\right]_0^{\pi} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\sin(k\pi/2)(P_n^{(k-1)}(\pi)+P_n^{(k-1)}(0)) \in \mathbb{Z}$$

Comme $I_n \in \mathbb{Z}$ et $I_n \to 0$, la suite(I_n) est stationnaire égale à 0.
Or sur $[0\,;\pi]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est continue, de signe constant, sans être nulle et $0 < \pi$ donc $I_n > 0$. Absurde.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}$$

(b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

(c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^{r} t^n(bt-a)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n!}r^{n+1}(br + a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(d) Par intégration par parties

$$I_n = \left[P_n(t)\,\mathrm{e}^t\right]_0^r - \int_0^r P_n'(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m P_n^{(m)}(t)\,\mathrm{e}^t\right]_0^r$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\left(P_n^{(m)}(r)p - P_n^m(0)q\right) \in \mathbb{Z}$$

Or sur $[0\,;r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.
Ainsi $qI_n \to 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.
Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*} \setminus \{1\}$.

Exercice 10 : [énoncé]
Posons
$$x = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$
On a
$$x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2}$$
Si $a \in [1\,;2]$ alors $x^2 = 2a + 2(2-a) = 4$ donc $x = 2$.
Si $a \in [2\,;+\infty[$ alors $x^2 = 4(a-1)$ puis $x = 2\sqrt{a-1}$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x)$$
Comme f est non nulle, on a $f(1) = 1$.
$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$ donc $f(-1) = -1$.

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = n$.
De plus
$$f(-n) = f((-1)\times n) = f(-1)\times f(n) = -f(n) = -n$$
donc
$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x$$
Pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$,
$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(p)\times f(\frac{1}{q})$$
Or $f(p) = p$ et
$$1 = f(1) = f(q\times\frac{1}{q}) = f(q)\times f(\frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$$
donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Par suite $f(x) = x$.

(c)
$$\forall x \geq 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geq 0$$
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors
$$f(y) = f(x+y-x) = f(x) + f(y-x) \geq f(x)$$
Ainsi f est croissante.

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}$$
Comme f est croissante :
$$f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n}) \leq f(x) < f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n})$$
puis
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq f(x) < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}$$
À la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient $x \leq f(x) \leq x$ *i.e.* $f(x) = x$.
Finalement, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 : [énoncé]
On a
$$\sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 = 0$$
et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient
$$\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 1$$

Exercice 13 : [énoncé]
On peut dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ et constater qu'elle possède un maximum en $x = 1/2$ de valeur $f(1/2) = 1/4$.

Exercice 14 : [énoncé]
$(a-b)^2 \geq 0$ donne $2ab \leq a^2 + b^2$

Exercice 15 : [énoncé]
Sachant $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$, on a
$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leq 0$$

Exercice 16 : [énoncé]
Sachant
$$2xy \leq x^2 + y^2$$
on obtient
$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 17 : [énoncé]
Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir
$$\left(1 + \sqrt{uv}\right)^2 \leq (1 + u)(1 + v)$$
soit encore
$$2\sqrt{uv} \leq u + v$$
ce qui découle de la propriété
$$\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geq 0$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par somme de quantités positives, on a
$$\sum_{1\leq k,\ell\leq n} (a_k - a_\ell)(b_k - b_\ell) = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} (a_k b_k - a_\ell b_k - a_k b_\ell + a_\ell b_\ell) \geq 0$$
En séparant la somme en quatre, on obtient
$$n\sum_{k=1}^n a_k b_k - 2\sum_{k=1}^n a_k \sum_{\ell=1}^n b_\ell + n\sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell \geq 0$$
et on en déduit
$$n\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$$
ce qui donne l'inégalité demandée.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit (α, β) solution. Considérons
$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x + y}$$
sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On a
$$f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$
f bornée implique $\alpha + \beta = 1$.
Inversement, supposons $\alpha + \beta = 1$.
Si $y \geq x$ alors
$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x + y} \leq \frac{y}{x + y}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leq 1$$
Si $x \geq y$ alors idem.

Exercice 20 : [énoncé]
Étudions la différence
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n n x_k y_k - \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n x_k y_\ell\right)$$
ce qui donne encore
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell)$$
Or
$$\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n} x_k (y_k - y_\ell) + \sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k (y_k - y_\ell)$$
car lorsque $k = \ell$ le terme $x_k(y_k - y_\ell)$ est nul.
Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme
$$\sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n} x_\ell (y_\ell - y_k)$$
et alors
$$\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n} (x_k - x_\ell)(y_k - y_\ell)$$
Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.
Au final, si les deux suites ont même monotonie alors
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]
Commençons par résoudre le min. On a

$$xy \leq (1-x)(1-y) \iff x+y \leq 1$$

Cas $x+y \leq 1$:

$$\min\{xy, (1-x)(1-y)\} = xy \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Cas $x+y > 1$:

$$\min\{xy, (1-x)(1-y)\} = (1-x)(1-y) < (1-x)x \leq 1/4$$

Exercice 22 : [énoncé]
Soit $x \leq y \in \mathbb{R}$. $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor \leq y$ or $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ car $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y.

Exercice 23 : [énoncé]
Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y$$

Par définition, $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, on a donc déjà

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$$

D'autre part $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc

$$x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

puis

$$\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

Puisque cette inégalité concerne des entiers, on peut transformer cette inégalité stricte en l'inégalité large suivante

$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 24 : [énoncé]
Si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

puis relation voulue.
Si $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

puis la relation voulue
Si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$ et $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$: analogue
Si $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$

puis la relation voulue.
Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 25 : [énoncé]
On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ puis $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$, or $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$$

$\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ puis $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ car $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Par suite

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

puis

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

et finalement

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $m = \lfloor nx \rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$.
On a $nq + r \leq nx < nq + r + 1$ donc pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}$$

Si $k+r<n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q$ et si $k+r\geq n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q+1$.
Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = nq+r=m=\lfloor nx\rfloor$$

Exercice 27 : [énoncé]
Si $a\notin\mathbb{Z}$ alors $[a\,;b]\cap\mathbb{Z}=\{\lfloor a\rfloor+1,\lfloor a\rfloor+2,\dots,\lfloor b\rfloor\}$ donc

$$\mathrm{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor$$

Or

$$\lfloor 1-a\rfloor = 1+\lfloor -a\rfloor = -\lfloor a\rfloor$$

car $a\notin\mathbb{Z}$ donc

$$\mathrm{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor$$

Si $a\in\mathbb{Z}$ alors $[a\,;b]\cap\mathbb{Z}=\{a,a+1,\dots,\lfloor b\rfloor\}$ donc

$$\mathrm{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor - a+1 = \lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor$$

car $1-a\in\mathbb{Z}$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $a_1=2$ et $b_1=1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(a_n+b_n\sqrt{3}) = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ et $b_{n+1}=a_n+2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2+3b_n^2 = -1$$

Récurrence établie.

(b) $a_n-1\leq b_n\sqrt{3}<a_n$ donc $2a_n-1\leq(2+\sqrt{3})^n<2a_n$ donc

$$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n\right\rfloor = 2a_n-1$$

C'est un entier impair.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit p un entier strictement supérieur à $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. On a

$$2n+1+2\sqrt{n^2+n}<p^2$$

donc

$$4(n^2+n)<\left(p^2-(2n+1)\right)^2$$

Puisque les nombres comparés sont des entiers, on a aussi

$$4(n^2+n)+1\leq\left(p^2-(2n+1)\right)^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2\leq\left(p^2-(2n+1)\right)^2$$

et on en déduit

$$4n+2\leq p^2$$

Or le carré d'un entier ne peut qu'être congru à 0 ou 1 modulo 4. On en déduit

$$4n+2<p^2$$

et donc

$$\sqrt{4n+2}<p$$

Ainsi, il n'existe pas d'entiers compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$ donc

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Exercice 30 : [énoncé]
Puisque $z\in U$, on a $\bar z=1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar z+1}{\bar z-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis

$$\frac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$$

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-\mathrm{i}|^2}{|z+\mathrm{i}|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors $x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi,

$$\forall z \in P, f(z) \in D$$

(b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \iff z = \mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z}$$

avec

$$\mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z} = \mathrm{i}\frac{1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}}{|1-Z|^2} = -\frac{2\,\mathrm{Im}(Z)}{|1-Z|^2} + \mathrm{i}\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \in P$$

Ainsi,

$$\forall Z \in D, \exists! z \in P, f(z) = Z$$

Exercice 32 : [énoncé]

C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n = \cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 33 : [énoncé]

C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = (1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Exercice 34 : [énoncé]

On observe que $B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = 1 - z + z^2 \text{ et } g(z) = 1 + z + z^2$$

On remarque

$$|f(z)-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|\,|z-(1+\mathrm{i})|\,, |f(z)+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\,|z-(1-\mathrm{i})|$$

$$|g(z)-\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\,|z+1+\mathrm{i}| \text{ et } |g(z)+\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|\,|z+1-\mathrm{i}|$$

Soient $a \in B$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \begin{cases} f(z_n) & \text{si } \mathrm{Re}(z_n) \leq 0 \\ g(z_n) & \text{si } \mathrm{Re}(z_n) > 0 \end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n = \left|z_n^2 + 1\right| = |z_n - \mathrm{i}|\,|z_n + \mathrm{i}|$$

Si $\mathrm{Re}(z_n) \leq 0$ alors

$$u_{n+1} = |f(z_n) - \mathrm{i}|\,|f(z_n) + \mathrm{i}| = u_n\,|z_n - (1+\mathrm{i})|\,|z_n - (1-\mathrm{i})|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $|z_n - (1+\mathrm{i})|$ et $|z_n - (1-\mathrm{i})|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2}u_n$$

Si $\mathrm{Re}(z_n) > 0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0 \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0 = 0$ puis $a = \pm\mathrm{i}$. Ainsi $B \subset \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.
Sachant $B \neq \emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-\mathrm{i}$ et inversement, on peut conclure

$$B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$$

Exercice 35 : [énoncé]

Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u = \bar{u}$.
On a alors

$$(z-a)^2 = (z-a)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{(z-a)(\bar{a}-\bar{z})}{\bar{a}\bar{z}} = -a\frac{|z-a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \frac{|z-a|^2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) On a
$$z \in C \iff |z - z_0|^2 = r^2$$
et en développant
$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)\,\overline{(z - z_0)} = z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0$$

(b) Notons que $0 \notin C$ puisque $|z_0| \neq r$. On peut donc considérer l'image $f(C)$.
Soit $Z = f(z)$ avec $z \in C$. Puisque
$$|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$
on a
$$1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - r^2}{z\bar{z}} = 0$$
donc
$$1 - z_0 Z - \bar{z}_0\bar{Z} + \left(|z_0|^2 - r^2\right)|Z|^2 = 0$$
ce qui se réécrit
$$|Z|^2 - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2}Z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}\bar{Z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2}$$
Posons alors
$$Z_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$$
et l'on obtient
$$|Z|^2 - \bar{Z}_0 Z - Z_0\bar{Z} + |Z_0|^2 = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} + \frac{|z_0|^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2} = \frac{r^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2}$$
Ainsi Z appartient au cercle C' de centre Z_0 et de rayon $\frac{r}{\left||z_0|^2 - r^2\right|}$.
Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on obtient que tout point Z de C' est l'image d'un certain z de C.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.
Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right) = 0 \iff x(x-1) + y(y-1) = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

(b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega'\left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 38 : [énoncé]

Soit z un complexe du cercle unité avec $z \neq 1$. Il existe $\theta \in \left]0\,;2\pi\right[$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. On a alors
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\frac{\mathrm{i}}{2\sin\theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$$
Quand θ parcourt $\left]0\,;2\pi\right[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\cot(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x = 1/2$.

Exercice 39 : [énoncé]

Soit $M(z)$ solution avec $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a \geq 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.
Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\\sqrt{3}\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\-\sqrt{3}\end{matrix}\right.$.
Inversement : ok.

Exercice 40 : [énoncé]

En multipliant les trois complexes t, u, v par $\mathrm{e}^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}_+$ auquel cas $t = a$.
En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne
$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$
et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$
Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,
$$|b - c| \leq a \leq b + c$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 41 : [énoncé]
$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0\,;\pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geq 0$.
On a $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec $2\theta \in [0\,;\pi]$ donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 42 : [énoncé]
$(\Longleftarrow)$ ok
$(\Longrightarrow)$ Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1 + x| = 1 + |x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.
Écrivons $x = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|1 + x|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

et

$$(1 + |x|)^2 = (1 + \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$|1 + x| = 1 + |x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geq 0$.
Par suite $x \in \mathbb{R}_+$ et on conclut.

Exercice 43 : [énoncé]
On a

$$|z| + \left|z'\right| = \frac{1}{2}\left|(z - z') + (z + z')\right| + \frac{1}{2}\left|(z' - z) + (z' + z)\right| \leq \left|z + z'\right| + \left|z - z'\right|$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z - z' = 0$ (*i.e.* $z = z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{z+z'}{z'-z} \in \mathbb{R}_+$ ce qui se résume à $z' = -z$.

Exercice 44 : [énoncé]
Si $a = 0$, l'inégalité est vraie avec égalité si, et seulement si, $b = 0$.
Si $a \neq 0$, l'inégalité revient à

$$1 + |u| \leq |1 + u| + |1 - u|$$

avec $u = b/a$. En écrivant $u = x + iy$,

$$\begin{aligned}(1 + |u|)^2 &= 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2\\ &\leq 2 + 2(x^2 + y^2)\\ &= |1 + u|^2 + |1 - u|^2\\ &\leq (|1 + u| + |1 - u|)^2\end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$ et $\left|1 - u^2\right| = 0$ soit $u = \pm 1$ ce qui revient à $a = \pm b$.

Exercice 45 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z \neq 1/\bar{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \leq 1 \iff |z - a|^2 \leq |1 - \bar{a}z|^2$$

Sachant $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y) + |y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \leq 1 \iff \left(|a|^2 - 1\right)\left(|z|^2 - 1\right) \geq 0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.

(b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leq 4$$

donc parmi les quantités $|z_1 + z_2|$ et $|z_1 - z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 47 : [énoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $z \in \mathbb{R}_-$ alors $f(z) = 0$.
Sinon, on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$ et alors

$$f(z) = r\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

Puisque $\cos(\theta/2) \geq 0$

$$|f(z)| = r\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} Z > 0\}$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} Z > 0$.
On peut écrire $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 48 : [énoncé]
$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1$ et $(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ donc
$|z+1| = |z| + 1 \iff \operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 49 : [énoncé]
Puisque le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right) = \exp(\mathrm{i}(n-1)\pi) = (-1)^{n-1}$$

Exercice 50 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Alors

$$\sum_{z\in U_n}|z-1| = \sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = 4\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\cot\frac{\pi}{2n}$$

Exercice 51 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$$

(a) Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n}\omega^{kp} = \omega^p\frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n}\omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n}1 = n$$

(b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n}\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1}\cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1}-\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi lier le calcul au précédent en écrivant

$$\frac{1}{1-\omega_i} = \sum_{p=0}^{n-1}\omega_i^p + \frac{\omega_i^n}{1-\omega_i}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \cdots$$

Exercice 52 : [énoncé]
On a
$$(1-\omega)S=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k-\sum_{k=1}^{n}k\omega^k=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k-n\omega^n=-n$$
donc
$$S=\frac{n}{\omega-1}$$

Exercice 53 : [énoncé]

(a)
$$j(j+1)=j^2+j=-1$$

(b)
$$\frac{j}{j^2+1}=\frac{j}{-j}=-1$$

(c)
$$\frac{j+1}{j-1}=\frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}}=\frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)}=\frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1}=\frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 54 : [énoncé]
Notons $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z\neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$ donc il existe $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$\frac{z+1}{z-1}=\omega_k$$
ce qui donne
$$(\omega_k-1)z=\omega_k+1$$
Si $k=0$ alors ce la donne $0=2$ donc nécessairement $k\in\{1,\dots,n-1\}$ et $\omega_k\neq 1$.
Par suite
$$z=\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}=\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}}=-\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}$$
Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement
$$\mathcal{S}=\left\{-\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}\mid k\in\{1,\dots,n-1\}\right\}$$
Puisque la fonction cot est injective sur $]0\,;\pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 55 : [énoncé]
On a
$$z^n+1=0\iff z^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$
$z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc
$$\mathcal{S}=\{z_0\omega_k\mid k\in\{0,\dots,n-1\}\}=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}}\mid k\in\{0,\dots,n-1\}\right\}$$

Exercice 56 : [énoncé]
$z=\mathrm{i}$ n'est pas solution.
Pour $z\neq i$,
$$(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n\iff\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n=1$$
$$\iff\exists k\in\{0,\dots,n-1\}\,,\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\omega_k$$
en notant $\omega_k=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$.
Pour $k=0$, $\omega_k=1$ et l'équation $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\omega_k$ n'a pas de solution.
Pour $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $\omega_k\neq 1$ et l'équation $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\omega_k$ a pour solution
$$z_k=\mathrm{i}\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$$
Ainsi $\mathcal{S}=\{z_1,\dots,z_{n-1}\}$ avec
$$z_k=\mathrm{i}\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}=\cot\frac{k\pi}{n}\in\mathbb{R}$$
deux à deux distincts car cot est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1\leq k\leq n-1$.

Exercice 57 : [énoncé]
On a
$$1+A+B=0,AB=2\text{ et }\operatorname{Im}(A)>0$$
donc
$$A=\bar{B}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a
$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k)$$
Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1+z+\dots+z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.

(b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x-\omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.

(c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,
$$1 - \omega^k = -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} 2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}$$
et
$$\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k} = \mathrm{i}^{n-1}$$
donc
$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$
puis la relation proposée.

Exercice 59 : [énoncé]

Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient
$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$
Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation
$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$
et donc
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc
$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
puis
$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$
et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geq 0$.

Exercice 60 : [énoncé]

$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.
Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) $\mathcal{S} = \{1, -1+2\mathrm{i}\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{-1+\mathrm{i}, -3+2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i}\}$.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) $\pm(3-2\mathrm{i})$

(b) $a = -2\mathrm{i}, b = -1+3i$ et $c = 2+\mathrm{i}$

(c) $|c-b| = |c-a| = \sqrt{13}$ et $|b-a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 63 : [énoncé]

On a
$$4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$
donc $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ est solution particulière de l'équation.
L'équation $z^3 = z_0^3$ équivaut alors à l'équation $(z/z_0)^3 = 1$ dont l'ensemble solution est
$$\mathcal{S} = \left\{z_0, z_0 j, z_0 j^2\right\}$$

Exercice 64 : [énoncé]

Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation
$$z^2 - (1+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0$$
On obtient l'ensemble solution
$$\mathcal{S} = \{(1+2\mathrm{i}, -\mathrm{i}), (-\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i})\}$$

Exercice 65 : [énoncé]
Posons $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z \quad [2\pi]$.

$$\begin{aligned} e^z = Z &\iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = |Z| e^{i\theta} \\ &\iff e^{\operatorname{Re} z} = |Z| \text{ et } e^{i \operatorname{Im} z} = e^{i\theta} \\ &\iff z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 66 : [énoncé]
Posons $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. On a

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$$

Pour n assez grand, on a $1 + x/n > 0$ et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n} \text{ avec } r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan \frac{y/n}{1 + x/n}$$

Quand $n \to +\infty$

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \times \left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to \exp(x)$$

et

$$n\theta_n \sim n \times \frac{y}{n} \to y$$

donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(x) e^{iy} = \exp(z)$$

Exercice 67 : [énoncé]
$z = e^{i\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$.
Si $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ alors $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, si $\cos\frac{\theta}{2} = 0$ alors $|z| = 0$.
et si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ alors $|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi \quad [2\pi]$.
$z' = e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ et la suite est similaire.

Exercice 68 : [énoncé]
En factorisant $e^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin\theta/2}{\cos\theta/2} = i \tan\frac{\theta}{2}$$

Exercice 69 : [énoncé]
On peut factoriser

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2\cos\frac{\theta - \theta'}{2} e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.

Exercice 70 : [énoncé]
Puisque $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$, en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$$

avec $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = -1 \\ \sin\alpha + \sin\beta = 0 \end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha + \sin\beta = 0$ donne

$$\alpha = -\beta \mod 2\pi \text{ ou } \alpha = \pi + \beta \mod 2\pi$$

Si $\alpha = \pi + \beta \mod 2\pi$ alors la relation $\cos\alpha + \cos\beta = -1$ donne $0 = -1$.
Il reste $\alpha = -\beta \mod 2\pi$ et alors $2\cos\alpha = -1$ donne $\alpha = \pm 2\pi/3 \mod 2\pi$.
Par suite $e^{i\alpha} = j$ ou j^2.
On obtient alors aisément $1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 0$ puis $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.