

Chapitre 2

Calculs algébriques

Sommaire

2.1	Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	27
2.1.1	L'existence admise des ensembles de nombres	27
2.1.2	Propriétés relatives à l'addition dans $\mathbb{C}$	27
2.1.3	Propriétés relatives au produit dans $\mathbb{C}$	28
2.2	Sommes et produits	29
2.2.1	Sommes et produits finis	29
2.2.2	Changements d'indice	30
2.2.3	Sommes et produits « télescopiques »	30
2.2.4	Quelques résultats classiques	31
2.3	Factorielles et coefficients binomiaux	32
2.3.1	Factorielle d'un entier	32
2.3.2	Coefficients binomiaux	32
2.3.3	Relations entre coefficients binomiaux	33
2.4	Sommes doubles, interversions	34
2.4.1	Somme sur un domaine rectangulaire	34
2.4.2	Somme sur un domaine triangulaire	35
2.4.3	Sommation par partition	35
2.4.4	Produits de sommes	36
2.5	Systèmes linéaires	37
2.5.1	Système linéaire de n équations à p inconnues	37
2.5.2	Exemples et définitions complémentaires	37
2.5.3	Interprétation géométrique (deux ou trois variables)	38
2.5.4	Système homogène associé	39
2.5.5	Structure de la solution générale d'un système linéaire quelconque	40
2.5.6	Systèmes de Cramer triangulaires	41
2.5.7	Opérations élémentaires sur les lignes d'un système	41
2.5.8	Méthode « du pivot de Gauss »	42
2.5.9	Trois exemples	44

2.1 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

2.1.1 L'existence admise des ensembles de nombres

Conformément au programme, on admet l'existence et les principales propriétés des ensembles de nombres suivants :

- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On a bien sûr les inclusions strictes : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

On sera également amené à considérer les ensembles suivants (dont les noms ne sont pas fixés par l'usage, mais dont la signification est bien connue) : l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers, l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels.

2.1.2 Propriétés relatives à l'addition dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.1.1 (propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$)

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une opération (ou loi de composition), notée $+$, avec les propriétés suivantes :

- (1a) La loi $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, x + y = y + x$
- (1b) La loi $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + (y + z) = (x + y) + z$
- (1c) Pour la loi $+$, l'entier naturel 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{C}, x + 0 = x$
- (1d) Pour la loi $+$, tout x de $\mathbb{C}$ possède un opposé (noté $-x$), donc tel que $x + (-x) = 0$;
La notation $x - y$ doit être comprise comme une contraction de $x + (-y)$.

Remarques diverses

- On note $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ privés de l'entier 0.
- Chacun des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est *stable* pour la loi $+$ (ce qui signifie que la somme de deux éléments de $\mathbb{Q}$, par exemple, est encore un élément de $\mathbb{Q}$). On peut donc considérer (1a), (1b), et (1c) comme des propriétés de la loi $+$ *restreinte* à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$, ou à $\mathbb{R}$.
- De même, chacun des ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est *stable par passage à l'opposé*, ce qui signifie que l'opposé d'un rationnel x , par exemple, est encore un rationnel. On peut donc considérer (1d) comme une propriété de la loi $+$ *restreinte* à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$, ou à $\mathbb{R}$. Pour ces trois ensembles, on peut donc également parler de *stabilité par différence* (si x et y sont dans $\mathbb{Q}$, par exemple, $x - y$ est dans $\mathbb{Q}$).

Ici l'ensemble $\mathbb{N}$ fait exception, car seul 0 possède un opposé dans $\mathbb{N}$ (lui-même!).

Enfin, on a bien sûr les identités : $-(-x) = x$, $-(x + y) = -x - y$, et $-(x - y) = -x + y$.

- On pourrait considérer l'opération *soustraction* sur $\mathbb{C}$ (définie par $(x, y) \mapsto x - y$) mais cette loi ne présente que peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.
- Une conséquence de (1b), (1c) et (1d) est que tout élément de $\mathbb{C}$ est *simplifiable pour l'addition*.
En d'autres termes : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (ajouter $-x$ de part et d'autre).
Pour des raisons analogues : on a l'équivalence $x + y = z \Leftrightarrow y = z - x$.

2.1.3 Propriétés relatives au produit dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.1.2 (propriétés du produit dans $\mathbb{C}$)

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une multiplication (notée $\times$, ou par juxtaposition : le produit de x par y est alors noté xy), avec les propriétés suivantes :

- (2a) La loi $\times$ est commutative : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, xy = yx$
- (2b) La loi $\times$ est associative : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x(yz) = (xy)z$
- (2c) Pour la loi $\times$, l'entier naturel 1 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{C}, 1x = x$
- (2d) La loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x(y + z) = xy + xz$
- (2e) Pour la loi $\times$, tout élément x **non nul** de $\mathbb{C}$ possède un inverse (noté x^{-1}), donc tel que $xx^{-1} = 1$

Remarques diverses

- On note $\frac{1}{x}$ plutôt que x^{-1} . La notation $\frac{y}{x}$ doit être comprise comme une contraction de $y x^{-1}$.
Cette dernière notation est rendue possible car le produit est une opération commutative.
Avec ces notations, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels s'écrit $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
- Chacun des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est *stable* pour la loi $\times$ (si x et y sont dans $\mathbb{Q}$, par exemple, xy est encore un élément de $\mathbb{Q}$). On peut donc considérer (2a), (2b), (2c) et (2d) comme des propriétés de la loi $\times$ *restreinte* à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$, ou à $\mathbb{R}$.
- Les identités $x0 = 0$ et $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ semblent évidentes mais elles se démontrent.
Il en est de même pour l'équivalence $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.
- Pour la propriété (2e), les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ font exception. En effet seul 1 possède un inverse dans $\mathbb{N}$ (lui-même) et seuls 1 et -1 possèdent un inverse dans $\mathbb{Z}$ (eux-mêmes!).
Dans $\mathbb{N}$, on a $xy = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1)$ et dans $\mathbb{Z}$ on a : $xy = 1 \Leftrightarrow ((x = y = 1) \text{ ou } (x = y = -1))$.
- Bien sûr, l'inverse d'un rationnel (resp. d'un réel) non nul est encore un rationnel (resp. un réel). On parle dans ce cas de *stabilité par passage à l'inverse*.
- Une conséquence de (2b), (2c) et (2d) est que tout élément de $\mathbb{C}^*$ est *simplifiable pour le produit*.
En d'autres termes : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, xy = xz \Rightarrow y = z$ (multiplier par x^{-1} de part et d'autre).
Pour des raisons analogues : si $x \neq 0$, on a l'équivalence $xy = z \Leftrightarrow y = zx^{-1}$.
Dans ces questions, il est essentiel de s'assurer que x est non nul avant de simplifier par x .
- Si x et y sont non nuls, on a bien sûr les identités : $(x^{-1})^{-1} = x, (-x)^{-1} = -(x^{-1}), (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
- On pourrait considérer l'opération *quotient* sur $\mathbb{C}$ (définie par $(x, y) \mapsto x/y$) mais cette loi n'a que des défauts : elle n'est pas partout définie (y doit être non nul), elle n'est ni commutative ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.

2.2 Sommes et produits

2.2.1 Sommes et produits finis

Définition 2.2.1

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

On note $\sum_{i \in I} x_i$ la somme des x_i , et on note $\prod_{i \in I} x_i$ leur produit.

Dans le cas où l'ensemble I est vide, on convient que $\sum_{i \in I} x_i = 0$, et que $\prod_{i \in I} x_i = 1$.

Remarques

– Dans les notations précédentes, il faut bien comprendre que chaque indice i apparaît une fois et une seule, dans la somme ou dans le produit. La commutativité des opérations fait qu'il n'est pas nécessaire de préciser dans quel ordre sont effectués cette somme ou ce produit.

– Supposons que I soit la réunion $I = J \cup K$ de deux ensembles disjoints J et K .

Il est clair que $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in K} x_i$ et que $\prod_{i \in I} x_i = \left(\prod_{i \in J} x_i \right) \left(\prod_{i \in K} x_i \right)$.

Cette remarque est à rapprocher des conventions $\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$ et $\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1$ (et elle aide à les comprendre).

– Un cas fréquent est celui où I est un intervalle d'entiers.

Supposons par exemple $I = \llbracket m, n \rrbracket$ (notation usuelle pour désigner $\{k \in \mathbb{N}, m \leq k \leq n\}$).

Dans ce cas, on notera $\sum_{i=m}^n x_i$ ou $\sum_{m \leq i \leq n} x_i$ pour la somme, et $\prod_{i=m}^n x_i$ ou $\prod_{m \leq i \leq n} x_i$ pour le produit.

Attention : l'utilisation de ces notations suggère qu'on effectue la somme (ou le produit) dans le sens des indices croissants. On considèrera donc que la somme est vide (donc vaut 0) et que le produit est vide (donc vaut 1) si $m > n$.

– La lettre utilisée pour décrire l'ensemble I est sans importance, dans la mesure où elle ne prête pas à confusion (on parle d'indice muet).

La même somme pourra donc être notée indifféremment $\sum_{i \in I} x_i$, $\sum_{j \in I} x_j$, ou $\sum_{k \in I} x_k$.

Par exemple, la somme $\sum_{j=1}^n x^j$ pourra être notée $\sum_{i=1}^n x^i$, mais certainement pas $\sum_{x=1}^n x^x$ ou $\sum_{x=1}^n x^n$.

Mise en facteur de termes constants

– Si λ ne dépend pas de l'indice i , alors $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i$.

Bien sûr $\sum_{i \in I} \lambda = \lambda \text{Card}(I)$ (où $\text{Card}(I)$ désigne le cardinal, c'est-à-dire le nombre d'éléments de I).

Plus généralement, si λ et μ sont constants : $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} y_i$.

– Si λ ne dépend pas de i , et si $n = \text{Card}(I) \geq 1$, alors $\prod_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda^n \prod_{i \in I} x_i$ et notamment $\prod_{i \in I} \lambda = \lambda^n$.

On a les égalités si $\prod_{i \in I} (x_i y_i) = \left(\prod_{i \in I} x_i \right) \left(\prod_{i \in I} y_i \right)$ et plus généralement : $\prod_{i \in I} x_i^p y_i^q = \left(\prod_{i \in I} x_i \right)^p \left(\prod_{i \in I} y_i \right)^q$.

– Attention surtout à ne pas faire l'erreur d'écrire $\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$

2.2.2 Changements d'indice

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

Soit J un ensemble fini, et φ une bijection de J sur I .

Ainsi à chaque indice i de I correspond un unique j de J tel que $i = \varphi(j)$.

Effectuer le changement d'indice $i = \varphi(j)$, c'est écrire (en posant $y_j = x_{\varphi(j)}$, pour tout j de J) :

- dans une somme : $S = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)} = \sum_{j \in J} y_j$ (que rien n'empêche alors d'écrire $S = \sum_{i \in J} y_i$).
- dans un produit : $P = \prod_{i \in I} x_i = \prod_{j \in J} x_{\varphi(j)} = \prod_{j \in J} y_j$ (que rien n'empêche alors d'écrire $P = \prod_{i \in J} y_i$).

Dans un tel calcul il faut distinguer le temps du changement d'indice $i = \varphi(j)$, pendant lequel i et j ne doivent pas être confondus, et le temps qui vient après (où l'indice muet j peut être renommé i).

La situation la plus fréquente est celle où I est un intervalle $\llbracket m, n \rrbracket$ d'entiers, et où le changement d'indice est une translation $i = j + p$ (le plus souvent $i = j + 1$ ou $i = j - 1$).

On écrira : $S = \sum_{i=m}^n x_i = \sum_{j=m+1}^{n+1} x_{j-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}$ ou directement $S = \sum_{i=m}^n x_i = \sum_{i=m+1}^{n+1} x_{i-1} = \sum_{i=m-1}^{n-1} x_{i+1}$.

Autre situation classique, un changement d'indice suggérant que la somme ou le produit sont parcourus en sens contraire du sens initial :

Par exemple, avec « $k \leftarrow n - k$ » on écrira : $\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n x_{n-k}$, ou $\prod_{k=0}^n x_k = \prod_{k=0}^n x_{n-k}$

2.2.3 Sommes et produits « télescopiques »

Pour comprendre cette notion, considérons l'exemple de la somme $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Par exemple $u_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

Pour calculer u_6 (ou plus généralement u_n), tout s'éclaire quand on réalise que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Ainsi, $u_6 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

Plus généralement, soit à calculer une somme $S = \sum_{i=m}^n x_i$.

Il peut être judicieux d'écrire $x_i = y_i - y_{i+1}$ (mais trouver y_i n'est pas forcément facile!).

Dans ce cas, on peut écrire toutes les étapes :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=m}^n x_i = \sum_{i=m}^n (y_i - y_{i+1}) = \sum_{i=m}^n y_i - \sum_{i=m}^n y_{i+1} = \sum_{i=m}^n y_i - \sum_{i=m+1}^{n+1} y_i \\ &= \left(y_m + \sum_{i=m+1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=m+1}^n y_i + y_{n+1}\right) = y_m - y_{n+1} \end{aligned}$$

L'idéal est d'écrire directement : $\sum_{i=m}^n (y_i - y_{i+1}) = y_m - y_{n+1}$ (on parle de « somme télescopique »).

On est en présence d'un « produit télescopique » $P = \prod_{i=m}^n x_i$ quand x_i s'écrit $x_i = \frac{y_i}{y_{i+1}}$.

Dans ces conditions, on écrira directement (en justifiant) : $P = \prod_{i=m}^n \frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{y_m}{y_{n+1}}$.

2.2.4 Quelques résultats classiques

Somme d'une suite arithmétique :

Proposition 2.2.1 (somme des entiers de 1 à n)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Plus généralement, si on cherche la somme S de n termes successifs a_k d'une progression arithmétique de raison r (c'est-à-dire $a_{k+1} = a_k + r$ pour tout k), et si les termes de début et de fin de cette somme sont d et f alors la formule à retenir est : $\sum a_k = n \frac{d+f}{2}$.

Un bon moyen de retrouver S est d'écrire (en notant a_k^+ et a_k^- les a_k « parcourus » de gauche à droite et de droite à gauche) : $2S = \sum a_k^+ + \sum a_k^- = \sum (a_k^+ + a_k^-) = \sum (d+f) = n(d+f)$.

Proposition 2.2.2 (somme des carrés, ou des cubes, des entiers de 1 à n)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On notera (ça aide à la mémorisation) que la somme $\sum_{k=1}^n k^3$ est égale au carré de la somme $\sum_{k=1}^n k$.

Proposition 2.2.3 (somme d'une suite géométrique)

Pour tout $x \neq 1$, et tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
On a bien sûr $S_n(1) = n$.

Par exemple, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Plus généralement, si on cherche la somme S de n termes successifs a_k d'une progression géométrique de raison q ($a_{k+1} = qa_k$ pour tout k), et si les termes de début et de fin de cette somme sont d et f alors la formule à retenir est : $\sum a_k = \frac{qf - d}{q - 1}$ (si $q \neq 1$, car si $q = 1$ la somme vaut na_0).

On peut calculer $T_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ par dérivation de la somme $S_{n+1}(x)$.

On obtient $T_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = S'_{n+1}(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$ (si $x \neq 1$).

Le calcul précédent est valable pour x dans $\mathbb{R}$, mais l'expression finale de $T_n(x)$ reste vraie dans $\mathbb{C}$.

Voici un résultat analogue au précédent (mais davantage du point de vue de la factorisation) :

Proposition 2.2.4

Pour tous x, y dans $\mathbb{C}$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a la factorisation :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Si l'entier n est impair (en appliquant ce qui précède à $-y$ plutôt qu'à y) :

$$x^n + y^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k} y^k = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + (-1)^k x^{n-1-k} y^k + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

On trouve en particulier les factorisations :

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y) & x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) & x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\x^4 - y^4 &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) & x^5 - y^5 &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\x^5 + y^5 &= (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)\end{aligned}$$

De même, en choisissant $y = 1$, on a les factorisations :

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1) & x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) & x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) \\x^4 - 1 &= (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) & x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\x^5 + 1 &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)\end{aligned}$$

Et plus généralement :

Pour tout entier n : $x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, et pour tout n impair $x^n + 1 = (x + 1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k}$

2.3 Factorielles et coefficients binomiaux

2.3.1 Factorielle d'un entier

Définition 2.3.1 (factorielle d'un entier)

On pose $0! = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $n! = n(n-1)!$ (le symbole $n!$ se lit « factorielle n »)

Remarques

- L'énoncé précédent est un exemple de définition *réursive*.
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'entier $n!$ est le produit des entiers de 1 à n , c'est-à-dire $n! = \prod_{k=1}^n k$
- On retiendra les valeurs :
 $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040.$
- L'entier $n!$ désigne le nombre de *permutations* d'un ensemble à n éléments (c'est-à-dire de bijections de cet ensemble sur lui-même).
 Par exemple les $3! = 6$ permutations des lettres du mot *abc* sont : *abc, acb, bac, bca, cab* et *cba*.
- Pour les grandes valeurs de n , on verra plus tard la *formule de Stirling* : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
 La signification de $\sim$ est que le quotient des deux expressions tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
 Par exemple, pour $n = 20$, on a $n! = 2432902008176640000$ et $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \approx 2.42278684676 \cdot 10^{18}$.

2.3.2 Coefficients binomiaux

Définition 2.3.2 (combinaisons de p éléments parmi n)

Soient n et p deux entiers, avec $0 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble fini possédant n éléments.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-ensemble de E possédant p éléments.

Remarques

- L'ensemble E dont il est question ici est évidemment sans importance.
Par exemple, dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$, il y a 10 parties à trois éléments, qui sont $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}$
- Le coefficient $\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ».
- Si E est un ensemble à n éléments (avec $n \geq 0$), il y a dans E :
une seule partie vide, donc $\binom{n}{0} = 1$, et une seule partie à n éléments (E lui-même), donc $\binom{n}{n} = 1$.
- On étend la définition en posant $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou si $p > n$ (ce qui est finalement assez logique).

Proposition 2.3.1

Soient n et p deux entiers, avec $0 \leq p \leq n$. On a l'égalité $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2.3.3 Relations entre coefficients binomiaux**Proposition 2.3.2**

On a les identités $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, et $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Cette dernière formule, avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, permet de calculer les $\binom{n}{p}$ de proche en proche.

On place souvent les $\binom{n}{p}$ dans un tableau triangulaire, de lignes et colonnes numérotées à partir de 0. Le coefficient $\binom{n}{p}$ vient alors se placer à l'intersection de la ligne d'indice n et de la colonne d'indice p . Le tableau obtenu est connu sous le nom de « triangle de Pascal » :

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$\dots$
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Proposition 2.3.3

on a les égalités : $\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1} \binom{n}{p}$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{n-p} \binom{n-1}{p}$

Proposition 2.3.4 (Formule du binôme)

Pour tous x, y de $\mathbb{C}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

En particulier : $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

En particulier, pour tous x et y de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 & (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 & (x - y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ (x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 & (x - y)^4 &= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

2.4 Sommes doubles, interversions

Dans cette section, on désigne par Ω une partie finie de $\mathbb{N}^2$.

On identifie tout couple (i, j) de Ω au point du plan d'abscisse i et d'ordonnée j .

On considère une application définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on note $x_{i,j}$ l'image du couple (i, j) .

Soit $S = \sum_{(i,j) \in \Omega} x_{i,j}$ la somme des $x_{i,j}$, quand (i, j) parcourt Ω . On dit que S est une *somme double*.

Une méthode habituelle de calcul de S consiste à voir cette somme double comme l'enchaînement de deux sommes simples consécutives.

2.4.1 Somme sur un domaine rectangulaire

Ici Ω est le produit cartésien $I \times J$ de deux intervalles $I = \llbracket m, n \rrbracket$ et $J = \llbracket p, q \rrbracket$, avec $m \leq n$ et $p \leq q$.

L'ensemble Ω s'identifie alors aux points d'intersection d'une grille rectangulaire du plan.

Dans ces conditions $S = \sum_{(i,j) \in \Omega} x_{i,j} = \sum_{i=m}^n \left(\sum_{j=p}^q x_{i,j} \right) = \sum_{j=p}^q \left(\sum_{i=m}^n x_{i,j} \right)$.

La première expression évoque un parcours de Ω en colonnes : pour chaque i en abscisse ($m \leq i \leq n$), on forme la somme « verticale » $V_i = \sum_{j=p}^q x_{i,j}$ et on termine en calculant $\sum_{i=m}^n V_i$.

La deuxième expression évoque un parcours de Ω en lignes : pour chaque j en ordonnée ($p \leq j \leq q$), on forme la somme « horizontale » $H_j = \sum_{i=m}^n x_{i,j}$ et on termine en calculant $\sum_{j=p}^q H_j$.

Il y a donc une « somme interne » et une « somme externe ». Le caractère rectangulaire de Ω fait que les bornes de la somme interne ne dépendent pas de l'« indice courant » dans la somme externe, et qu'on peut librement intervertir les deux sommes.

Dans la pratique, on écrira indifféremment : $S = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} x_{i,j} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q x_{i,j} = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n x_{i,j}$

Dans le cas particulier où $I = J = \llbracket m, n \rrbracket$, on pourra écrire $S = \sum_{m \leq i, j \leq n} x_{i,j}$

Mise en facteur de termes indépendants de l'indice de sommation

Considérons la somme $S = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} x_{i,j}$, où $x_{i,j}$ peut s'écrire $x_{i,j} = \lambda_i \mu_j y_{i,j}$.

On peut alors factoriser λ_i dans une somme interne sur j , et μ_j dans une somme interne sur i .

Plus précisément, on peut écrire : $S = \sum_{i=m}^n \left(\sum_{j=p}^q \lambda_i \mu_j y_{i,j} \right) = \sum_{i=m}^n \left(\lambda_i \sum_{j=p}^q \mu_j y_{i,j} \right) = \sum_{j=p}^q \left(\mu_j \sum_{i=m}^n \lambda_i x_{i,j} \right)$

Dans le cas où $x_{i,j}$ s'écrit $x_{i,j} = \lambda_i \mu_j$, la factorisation est encore plus prononcée :

Dans ce cas on écrira : $S = \sum_{i=m}^n \left(\sum_{j=p}^q \lambda_i \mu_j \right) = \sum_{i=m}^n \left(\lambda_i \sum_{j=p}^q \mu_j \right) = \left(\sum_{i=m}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=p}^q \mu_j \right)$

2.4.2 Somme sur un domaine triangulaire

Un cas particulier important est celui où Ω est un domaine triangulaire du plan.

Pour fixer les idées, supposons que $\Omega = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq i \leq j \leq n\}$.

Dans ces conditions $S = \sum_{(i,j) \in \Omega} x_{i,j} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n x_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j x_{i,j} \right)$.

Là aussi, on choisit un parcours de Ω en lignes ou en colonnes, mais il faut prendre garde au fait que les bornes de la somme interne dépendent de l'indice courant dans la somme externe : l'intervention nécessite donc un peu de réflexion.

Dans le même ordre d'idée, on écrira les interversions suivantes (liste non exhaustive) :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n x_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i x_{i,j}, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{0 \leq i < j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} x_{i,j} \\ \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ 0 \leq i+j \leq n}} x_{i,j} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} x_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} x_{i,j} \quad (\text{ici, il est très recommandé de faire un dessin !}) \end{aligned}$$

2.4.3 Sommation par partition

Si Ω est la réunion **disjointe** de deux ou de plusieurs parties $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ du plan, on pourra écrire :

$$S = \sum_{(i,j) \in \Omega} x_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \Omega_1} x_{i,j} + \sum_{(i,j) \in \Omega_2} x_{i,j} + \sum_{(i,j) \in \Omega_3} x_{i,j} \dots$$

Cette méthode est utile lorsque l'expression de $x_{i,j}$ varie en fonction de la position respectives de deux indices i et j (par exemple selon que $i < j$, $i = j$, ou $i > j$).

On pourra par exemple écrire, si on sait que $\Omega = \llbracket m, n \rrbracket^2$:

$$\sum_{i,j} x_{i,j} = \sum_{i \leq j} x_{i,j} + \sum_{i > j} x_{i,j} = \sum_{i=m}^n x_{i,i} + \sum_{i < j} x_{i,j} + \sum_{i > j} x_{i,j} = \sum_{i=m}^n x_{i,i} + \sum_{i \neq j} x_{i,j}$$

Il est possible aussi de décrire une zone triangulaire par des parallèles aux diagonales :

Par exemple (en faisant un dessin !) : $\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq i \leq n \\ i-j=d}} x_{i,j} \right) = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{i=d}^n x_{i,i-d} \right) = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-d} x_{j+d,j} \right)$

Ou encore (et là aussi, on s'aide obligatoirement d'une représentation graphique) :

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \left(\sum_{0 \leq j \leq n-i} x_{i,j} \right) = \sum_{0 \leq j \leq n} \left(\sum_{0 \leq i \leq n-j} x_{i,j} \right) = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=d}} x_{i,j} \right) = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{i=0}^d x_{i,d-i} \right) = \sum_{d=0}^n \left(\sum_{j=0}^d x_{d-j,j} \right)$$

2.4.4 Produits de sommes

Soit $X = \sum_{i \in I} x_i$ et $Y = \sum_{j \in J} y_j$ deux sommes finies.

On développe leur produit en écrivant $XY = \sum_{i \in I} x_i \sum_{j \in J} y_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j$.

Pour le développement de XY , il faut utiliser deux indices différents !

On n'écrira donc jamais : $\sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n y_i = \dots$, le risque étant l'**erreur fatale** « $\sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n y_i = \sum_{i=0}^n x_i y_i$ »

On peut généraliser ce qui précède au développement du produit de plusieurs sommes :

Par exemple, le développement $\sum_{i \in I} x_i \sum_{j \in J} y_j \sum_{k \in K} z_k = \sum_{(i,j,k) \in I \times J \times K} x_i y_j z_k$ donne une *somme triple*.

Enfin, les produits de produits ne se comportent pas comme les produits de sommes !

Par exemple : $\prod_{i \in I} x_i \prod_{i \in I} y_i = \prod_{i \in I} (x_i y_i)$, ou encore $\left(\prod_{i \in I} x_i \right)^2 = \prod_{i \in I} x_i^2$ (facile, si on réfléchit d'abord).

Développement du carré ou du cube d'une somme

Soit $I = \llbracket m, n \rrbracket$ un intervalle d'entiers.

On peut écrire de plusieurs manières différentes le développement du carré de la somme $\left(\sum_{i=m}^n x_i \right)^2$:

$$\left(\sum_{i=m}^n x_i \right)^2 = \sum_{m \leq i, j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n x_i x_j = \sum_{i=m}^n x_i^2 + \sum_{\substack{m \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j = \sum_{i=m}^n x_i^2 + 2 \sum_{m \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

« Le carré de la somme » c'est donc « la somme des carrés augmentée de tous les doubles produits ».

De la même manière, on peut développer le cube d'une somme en distinguant (parmi les $x_i x_j x_k$ du développement), ceux qui sont des cubes x_i^3 (donc obtenus quand $i = j = k$), ceux qui contiennent deux fois (et deux seulement) un même x_i et ceux pour lesquels les trois indices i, j, k sont distincts.

Avec un peu de réflexion, on obtient le développement suivant (on a simplifié l'écriture des sommes, sachant très bien que les indices i, j, k sont ici compris entre m et n) :

$$\left(\sum_{i=m}^n x_i \right)^3 = \sum_{m \leq i, j, k \leq n} x_i x_j x_k = \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n \sum_{k=m}^n x_i x_j x_k = \sum_{i=m}^n x_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j + 6 \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k$$

2.5 Systèmes linéaires

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Conformément au programme, on introduit ici la notation de système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Certaines notions théoriques ne seront abordées qu'au second semestre.

2.5.1 Système linéaire de n équations à p inconnues

Définition 2.5.1

On appelle *système linéaire* de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les a_{ij} (qui sont éléments de $\mathbb{K}$) sont appelés les *coefficients du système*.

Les coefficients $b_1, \dots, b_n$ (qui sont éléments de $\mathbb{K}$) sont appelés les *seconds membres*.

On dit que l'élément $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ est le p -uplet des *inconnues* du système.

On dit que $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une *solution* du système si les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ satisfont à chacune des égalités figurant dans (S).

2.5.2 Exemples et définitions complémentaires

- Dans la pratique, on est amené à résoudre des systèmes à deux, trois, ou quatre inconnues. Celles-ci seront alors notées x, y, z, t par exemple, plutôt que x_1, x_2, x_3, x_4 .
- Dans le cas $n = p$, on parle de système « carré » :

$$\text{Par exemple } (S) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \text{ est un système carré de taille 3, d'inconnues } x, y, z.$$

L'enseignement de spécialité maths de la classe de Terminale S comporte une approche matricielle des systèmes linéaires.

Par exemple, le système (S) précédent s'écrit $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le point de vue matriciel est très fécond, et il sera développé plus tard dans l'année. On se contentera ici de quelques allusions au vocabulaire de la spécialité maths de la classe de TS.

- Certains systèmes peuvent posséder plus d'équations que d'inconnues (donc $n > p$ dans la définition ci-dessus : on dit qu'un tel système est « sur-déterminé ») ou au contraire moins d'équations que d'inconnues ($n < p$: système « sous-déterminé »).

$$\text{Exemple } \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases} \quad (\text{sur-déterminé}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z + t + u = 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u = -2 \\ y + 2z + 2t + 6u = 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u = 12 \end{cases} \quad (\text{sous-déterminé})$$

– Certains systèmes sont dits *triangulaires* (ou « en escaliers », ou « en cascades », ou « échelonnés »).

$$\text{Par exemple, les systèmes } \begin{cases} x - 3y - z + t = 5 \\ 2y + z - 3t = 2 \\ z + t = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = 5 \\ y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{sont échelonnés.}$$

– Dans certains cas, l'écriture d'un système linéaire (S) peut comporter un (ou plusieurs !) paramètre(s). Il faut alors résoudre en discutant suivant les valeurs du ou des paramètres.

$$\text{Exemples : } \begin{cases} x + y - mz = m + 2 \\ mx - y + 2z = 1 \\ x - my + z = m - 1 \end{cases} \quad (\text{paramètre } m) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad (\text{paramètres } a, b)$$

Dans la résolution d'un système à paramètre m , il est important de savoir si m est à valeurs réelles ou complexes, car les cas particuliers de la discussion ne sont alors pas forcément les mêmes.

2.5.3 Interprétation géométrique (deux ou trois variables)

Dans cette sous-section, les coefficients et variables sont supposés appartenir à $\mathbb{R}$.

On identifie ici $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) au plan (resp. à l'espace) muni d'un repère.

- Si $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $ax + by = c$ est une droite du plan.
- Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $ax + by + cz = d$ est un plan de l'espace.

Résoudre $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ \dots \end{cases}$ c'est donc chercher les points communs (éventuels) à des droites du plan.

Et résoudre $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ \dots \end{cases}$ c'est chercher les points communs (éventuels) à des plans de l'espace.

Intersection de deux droites du plan

On utilise la notation $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ (appelée « déterminant 2×2 »). On note que $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Les deux vecteurs (α, β) et (γ, δ) sont proportionnels si et seulement si ce déterminant est nul.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$, et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $a'x + b'y = c'$.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $u = (b, -a)$, et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $u' = (b', -a')$.

Un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$ est $v = (a, b)$, et un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}'$ est $v' = (a', b')$.

Soit $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le système précisant $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

D'après le cours de TS, le système (S) s'écrit $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

On dit que A est la matrice du système (S) , et que B est la colonne des seconds membres.

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ le *déterminant* de (S) (ou encore : le déterminant de la matrice A).

Proposition 2.5.1

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Les droites $(\mathcal{D}) : ax + by = c$ et $(\mathcal{D}') : a'x + b'y = c'$ ne sont pas parallèles.
- Les vecteurs $u = (b, -a)$ et $u' = (b', -a')$ ne sont pas proportionnels.
- Les vecteurs $v = (a, b)$ et $v' = (a', b')$ ne sont pas proportionnels.
- Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ n'est pas nul.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible.

Si les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, elles ont un unique point en commun.

Proposition 2.5.2

On suppose que le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ est non nul.

Le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ possède alors une solution unique (x, y) .

Elle est donnée par les « formules de Cramer » : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, où $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

Avec les notations de TS, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible, alors sa matrice inverse est $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$.

Dans ce cas : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} cb' - c'b \\ ac' - a'c \end{pmatrix}$

On retrouve ainsi les formules de Cramer.

Cas où les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles

On suppose que $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$ sont parallèles.

Autrement dit, on suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $(a', b') = \lambda(a, b)$.

Les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont alors confondues et si seulement si $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$.

Dans ce cas le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ se réduit à la seule équation $ax + by = c$ de $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles mais pas confondues, alors $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ n'a pas de solution.

2.5.4 Système homogène associé

Définition 2.5.2

Un système linéaire est dit *homogène* si ses seconds membres b_i sont nuls.

À un système linéaire (S) on *associe* donc un système homogène (H) en annulant les seconds membres.

$$\text{Par exemple, } (H) : \begin{cases} 2x + 7y + 3z + 4t = 0 \\ x + 3y + 5z - 2t = 0 \\ x + 5y - 9z + 8t = 0 \\ 5x + 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases} \text{ est homogène associé à } (S) : \begin{cases} 2x + 7y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 3y + 4z + 5t = 2 \end{cases}$$

Structure de la solution générale d'un système homogène

Un système homogène a toujours au moins la solution $(0, \dots, 0)$ (souvent notée $\vec{0}$) dite *solution triviale*.

Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $v = (x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$ sont deux solutions du système homogène (H) , alors tout p -uplet $w = \lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \dots, \lambda x_p + \mu x'_p)$ est encore solution de (H) .

On exprime cela en disant que la solution générale de (H) est « stable par combinaisons linéaires ».

Avec les notations de TS, le système homogène (H) s'écrit $AX = 0$ (où 0 est ici une matrice colonne de coefficients tous nuls). La règle de calcul $A(\lambda X + \mu X') = \lambda AX + \mu AX'$ confirme que si les colonnes X, X' sont solutions de (H) , il en est de même de leurs combinaisons linéaires $\lambda X + \mu X'$.

Si la solution générale de (H) n'est pas *réduite* à $\vec{0}$, on montre qu'elle s'écrit comme l'ensemble des combinaisons linéaires $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ d'un certain nombre r de solutions non nulles *indépendantes* (ces détails seront précisés ultérieurement). On dit alors que $u_1, u_2, \dots, u_r$ constituent une *base de l'espace* des solutions de (H) .

2.5.5 Structure de la solution générale d'un système linéaire quelconque

Le résultat suivant donne la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire quelconque.

Proposition 2.5.3

Soit (S) un système linéaire, et soit (H) le système homogène associé. La solution générale de (S) , si elle est non vide, s'obtient en ajoutant à la solution générale de (H) une solution particulière de (S) .

La proposition précédente se démontre facilement avec les notations de TS.

En effet, soit X_0 une colonne solution particulière du système (S) .

Dans ces conditions, la colonne X est solution de (S) si et seulement si $AX = B$ c'est-à-dire $AX = AX_0$, ou encore $A(X - X_0) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $X - X_0$ est une solution Z de (H) .

La solution générale de (S) s'écrit donc bien $X = X_0 + Z$, où Z est une solution quelconque de (H) .

Attention ! L'ensemble des solutions de (S) peut être vide. C'est le cas par exemple de $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Le résultat précédent indique donc que la solution générale de (S) , si elle est non vide, est réduite à une seule solution (quand (H) n'a que la solution nulle) ou alors qu'elle est infinie.

- Par exemple, le système $(S) : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ possède l'unique solution $(x, y) = (1, 1)$.
- En revanche, l'ensemble des solutions de $(S) : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$ est formé des triplets $(1 + \lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$.

On l'obtient en ajoutant à la solution particulière $(1, 0, 1)$ la solution générale $\lambda(1, 1, -2)$ de (H) .

2.5.6 Systèmes de Cramer triangulaires

Un *système de Cramer triangulaire* est un système linéaire à n équations et n inconnues, qui se présente sous forme triangulaire (supérieurement ou inférieurement), avec des coefficients diagonaux non nuls.

▷ Systèmes de Cramer triangulaires supérieurs

$$\text{Dans ce cas, (S) s'écrit : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On trouve alors $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, puis $x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)$,

Une fois connus $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$, on trouve $x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{ij}x_j - \cdots - a_{in}x_n)$

▷ Systèmes de Cramer triangulaires inférieurs

$$\text{Le système (S) s'écrit ici : } \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce cas, on trouve $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$, puis $x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1)$,

Une fois connus $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, on trouve : $x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ij}x_j - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1})$

▷ Systèmes de Cramer diagonaux

La matrice du système étant diagonale, on obtient immédiatement : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$.

2.5.7 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition 2.5.3

Soit (S) un système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notons $E_1, E_2, \dots, E_n$ les équations successives de (S).

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une équation E_i par un scalaire *non nul* α . On note : $E_i \leftarrow \alpha E_i$.
- Ajouter à l'une des équations E_i un multiple d'une autre équation E_j . On note : $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$.
- Échanger deux équations E_i et E_j . On note : $E_i \leftrightarrow E_j$.

Proposition 2.5.4

Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système (Σ) équivalent, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).

On peut enrichir la panoplie des opérations élémentaires avec les opérations suivantes :

- Remplacer l'équation E_i par $\alpha E_i + \beta E_j$, avec $\alpha \neq 0$ et $j \neq i$.

Il s'agit en fait de la composée des deux opérations $E_i \leftarrow \alpha E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$.

- Ajouter à l'équation E_i une combinaison linéaire des autres équations du système.

Une telle opération peut s'écrire $E_i \leftarrow E_i + \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$.

- On peut supprimer de (S) toute équation E_i qui est combinaison linéaire des autres équations de (S).

En effet si $E_i = \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$, l'opération $E_i \leftarrow E_i - \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$ remplace E_i par l'équation $0 = 0$, qui peut bien sûr être éliminée du système (S).

- Même si c'est moins fréquent, on peut adjoindre au système (S) une nouvelle équation obtenue par combinaison linéaire des équations initiales.

On peut interpréter cette modification de (S) en disant qu'on adjoint à (S) la nouvelle équation $0 = 0$ (on ne modifie pas l'ensemble des solutions) puis qu'on ajoute à celle-ci une combinaison linéaire des équations initiales.

2.5.8 Méthode « du pivot de Gauss »

▷ Principe de la méthode

Le principe est le suivant : par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (Σ) équivalent et dont la matrice est échelonnée supérieurement. La résolution de (Σ) donne alors les solutions de (S).

▷ Mise en œuvre de la méthode

$$\text{Considérons le système : (S)} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1p} x_p & = & b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2j} x_j + \cdots + a_{2p} x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{ip} x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nj} x_j + \cdots + a_{np} x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Supposons dans un premier temps que a_{11} est non nul.

On effectue alors des opérations élémentaires, avec a_{11} comme *pivot*, pour annuler les coefficients de x_1 dans les équations $E_2, E_3, \dots, E_n$:

$$\text{Avec } \left\{ \begin{array}{l} E_2 \leftarrow a_{11} E_2 - a_{21} E_1 \\ \vdots \\ E_i \leftarrow a_{11} E_i - a_{i1} E_1 \\ \vdots \\ E_n \leftarrow a_{11} E_n - a_{n1} E_1 \end{array} \right. \quad \text{(S) devient : (S')} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1p} x_p & = & b_1 \\ a'_{22} x_2 + \cdots + a'_{2j} x_j + \cdots + a'_{2p} x_p & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i2} x_2 + \cdots + a'_{ij} x_j + \cdots + a'_{ip} x_p & = & b'_i \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} x_2 + \cdots + a'_{nj} x_j + \cdots + a'_{np} x_p & = & b'_n \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que le coefficient a'_{22} est non nul.

Les opérations élémentaires $E_i \leftarrow a'_{22}E_i - a'_{32}E_2$ (avec $3 \leq i \leq n$) conduisent à :

$$(S'') \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + \cdots + a_{1p} x_p = b_1 \\ \quad \quad \quad a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + a'_{24} x_4 + \cdots + a'_{2p} x_p = b'_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad a''_{33} x_3 + a''_{34} x_4 + \cdots + a''_{3p} x_p = b''_3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a''_{n3} x_3 + a''_{n4} x_4 + \cdots + a''_{np} x_p = b''_n \end{array} \right.$$

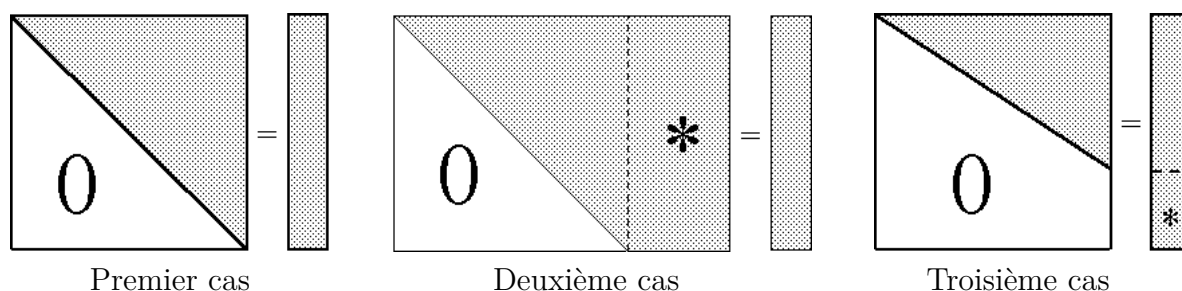
On poursuit ainsi la mise sous forme échelonnée de la matrice du système.

À un moment donné, il est possible que le coefficient diagonal qui doit nous servir de nouveau pivot soit nul (mais alors ce n'est pas un pivot !) : dans ce cas on échange l'équation concernée avec l'une des équations suivantes de manière à obtenir un pivot non nul.

Il se peut que tous les pivots potentiels pour passer à l'étape suivante soient nuls. C'est le cas dans (S'') par exemple, si tous $a''_{33}, a''_{43}, \dots, a''_{n3}$ sont tous nuls : dans cette situation particulière, on s'intéressera au coefficient a''_{34} (s'il est non nul) ou à défaut aux coefficients $a_{44}, \dots, a_{n4}$, etc.

▷ **Forme finale du système**

A la fin de la méthode, (S) a été transformé en un système échelonné supérieurement (Σ), et qui peut se présenter sous trois formes suivantes, dont voici les représentations symboliques.



Premier cas :

Dans cette représentation symbolique, on voit bien la diagonale des pivots non nuls. Le cas évoqué ici est donc celui d'un système de Cramer, ramené à une forme triangulaire supérieure, qu'on résout « en cascades », ce qui donne la solution unique de (S).

Deuxième cas :

Il y a ici des inconnues en surnombre (c'est la zone marquée du symbole *). Ces inconnues excédentaires (ou *non principales*) sont alors reportées au second membre, où elles jouent le rôle de paramètres arbitraires. On résout le système par rapport aux inconnues *principales*. C'est alors un système de Cramer, dont l'unique solution s'exprime en fonction des inconnues non principales. La présence de ces valeurs arbitraires fait que (S) possède une infinité de solutions.

Troisième cas :

Ici il y a des équations en surnombre, dites *non principales*. Leurs premiers membres sont nuls.

Tout dépend alors de leurs seconds membres (c'est la zone marquée d'un *) :

- Si l'un d'eux est non nul, alors (Σ) et donc (S) n'ont pas de solution.
- Si tous ces seconds membres sont nuls, (Σ) se réduit à ses équations *principales*, qui forment un système de Cramer. (S) admet donc une solution unique, obtenue en résolvant ce système « en cascades ».

2.5.9 Trois exemples

Premier exemple

$$\text{Résoudre le système (S) : } \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot, et on procède par équivalences :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} E_2 \leftarrow 2E_1 - E_2 \\ E_3 \leftarrow 3E_1 - E_3 \\ E_4 \leftarrow 4E_1 - E_4 \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ y + 2z + 7t = 10 \\ 2y + 8z + 10t = 20 \\ 7y + 10z + 13t = 30 \end{cases} \\ & \iff \begin{pmatrix} E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2 \\ E_4 \leftarrow 7E_2 - E_4 \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ y + 2z + 7t = 10 \\ 4z - 4t = 0 \\ 4z + 36t = 40 \end{cases} \\ & \iff (E_4 \leftarrow E_4 - E_3) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ y + 2z + 7t = 10 \\ 4z - 4t = 0 \\ 40t = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ z = t = 1 \\ y = -2z - 7t + 10 = 1 \\ x = 11 - 2y + 3z + 4t = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système (S) possède donc l'unique solution $(x, y, z, t) = (2, 1, 1, 1)$.

Deuxième exemple

$$\text{Résoudre le système (S) } \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 3x + y + z - 2t - u = 1 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda \end{cases} \quad (\text{où } \lambda \text{ un paramètre réel})$$

On applique la méthode du pivot, et on procède par équivalences :

$$\begin{aligned} (S) \quad & \begin{pmatrix} E_2 \leftarrow (3E_1 - E_2)/2 \\ E_3 \leftarrow 2E_1 - E_3 \\ E_4 \leftarrow 3E_1 - E_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 4y + 7z - 2t - 10u = 4 \\ 7y + 13z - 11t - 19u = 4 \\ 11y + 20z - 13t - 29u = 9 - \lambda \end{cases} \\ & \iff \begin{pmatrix} E_3 \leftarrow (4E_3 - 7E_2)/3 \\ E_4 \leftarrow 4E_4 - 11E_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 4y + 7z - 2t - 10u = 4 \\ z - 10t - 2u = -4 \\ 3z - 30t - 6u = -4\lambda - 8 \end{cases} \\ & \iff (E_4 \leftarrow E_4 - 3E_3) \iff \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 4y + 7z - 2t - 10u = 4 \\ z - 10t - 2u = -4 \\ 0 = 4 - 4\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

On constate que si $\lambda \neq 1$, alors (S) n'a pas de solution.

Supposons donc $\lambda = 1$. Le système (S) se réduit au trois premières équations ci-dessus.

On constate qu'on obtient un système de Cramer par rapport aux inconnues x, y, z , à condition de traiter les variables t et u comme des paramètres arbitraires.

Voici comment se termine la résolution de (S) :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 3y + 5z = 3 + 2t + 7u \\ 4y + 7z = 4 + 2t + 10u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 - 5E_3 \\ E_2 \leftarrow (E_2 - 7E_3)/4 \\ \iff \end{array} \begin{cases} x + 3y = 23 - 48t - 3u \\ y = 8 - 17t - u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases} \iff \begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 - 3E_2 \\ \iff \end{array} \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 8 - 17t - u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont les 5-uplets $A = (x, y, z, t, u)$ qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t, u) &= (-1 + 3t, 8 - 17t - u, -4 + 10t + 2u, t, u) \\ &= (-1, 8, -4, 0, 0) + t(3, -17, 10, 1, 0) + u(0, -1, 2, 0, 1) \end{aligned}$$

où t et u ont des valeurs arbitraires.

On voit bien ici la structure de l'ensemble des solutions : à la solution particulière $A_0 = (-1, 8, -4, 0, 0)$ (obtenue pour $t = u = 0$), on ajoute la solution générale du système homogène (H) associé à (S) , et la solution générale de (H) est le plan engendré par $(3, -17, 10, 1, 0)$ et $(0, -1, 2, 0, 1)$.

Troisième exemple

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \end{cases}$$

Il est ici rentable d'adjoindre à (S) une nouvelle équation combinaison linéaire des équations initiales. Plus précisément on va lui adjoindre l'équation $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$.

On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \\ (\lambda + 3)(x + y + z + t) = 2 \end{cases}$$

On voit tout de suite que le système n'a pas de solution si $\lambda = -3$.

Supposons donc $\lambda \neq -3$.

On peut alors remplacer E_5 par $E_5 = E_5/(\lambda + 3)$.

On obtient

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \\ x + y + z + t = \frac{2}{\lambda + 3} \end{cases} \iff \begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 - E_5 \\ E_2 \leftarrow E_2 - E_5 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_5 \\ E_4 \leftarrow E_4 - E_5 \\ \iff \end{array} \begin{cases} (\lambda - 1)x = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)y = -2\frac{\lambda + 4}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)z = \frac{-2}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)t = \frac{3\lambda + 7}{\lambda + 3} \end{cases}$$

On voit que si $\lambda = 1$ le système (S) n'a pas de solution.

On suppose donc que λ n'est ni égal à -3 ni égal à 1 .

Le système (S) possède alors une solution unique (x, y, z, t) donnée par :

$$(x, y, z, t) = \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 3)} (\lambda + 1, -2\lambda - 8, -2, 3\lambda + 7)$$