Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

Sommaire

3.1 Notation cartésienne, plan complexe

3.1.1 Notation cartésienne, partie réelle, partie imaginaire

Proposition 3.1.1 (opérations sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$)
On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :
$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases}(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ (x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')\end{cases}$$
Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une « structure de corps commutatif ». Plus précisément :
- *Le neutre pour la loi $+$ est $(0,0)$, et l'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.*
- *Le neutre pour le produit est $(1,0)$.*
- *Pour tout $z=(x,y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z} = \Big(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\Big)$.*

Définition 3.1.1 (nombres complexes, notation provisoire)
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ quand il est muni deux lois précédentes.
Ses éléments $z=(x,y)$ sont appelés *nombres complexes.*

Proposition 3.1.2 ($\mathbb{R}$ considéré comme une partie de $\mathbb{C}$)
L'application $\varphi : x \mapsto (x,0)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ et $\begin{cases}\varphi(x+x') = \varphi(x)+\varphi(x') \\ \varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')\end{cases}$
Cette bijection permet donc d'identifier (algébriquement) le couple $(x,0)$ avec le réel x.
De cette manière, on peut donc considérer que $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.2 (le nombre i, notation cartésienne des nombres complexes)
On pose $i=(0,1)$. On rappelle que pour tout x de $\mathbb{R}$, on identifie $(x,0)$ et x.
Tout z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z=(x,y)$, avec x et y dans $\mathbb{R}$.
Mais l'égalité $z=(x,y)$ équivaut à $z=(x,0)+(0,1)(y,0)$, c'est-à-dire $z=x+iy$.
On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.
Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$.
Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 3.1.3 (nombres complexes réels ou imaginaires purs)
Dire que z est *réel*, c'est dire que sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(z)$ est nulle.
On dit que z est *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}(z)=0$, c'est-à-dire si $z=iy$, avec y dans $\mathbb{R}$.

Attention : dire que le complexe z n'est pas réel ne signifie pas qu'il est imaginaire pur !

Identifications entre parties réelles et parties imaginaires

Soient $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

On sait que $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on dit qu'on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires).

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels !).

Plus généralement, soit ω un nombre complexe <u>non réel</u>.
Alors tout z de $\mathbb{C}$ s'écrit encore façon unique $z = a + b\omega$, avec a, b dans $\mathbb{R}$.
On peut alors encore identifier : $\forall\,(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

Nouvelle écriture des opérations sur $\mathbb{C}$

Avec les notations précédentes, le nombre i vérifie $i^2 = -1$.

Soient $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les opérations sur $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

Si $z = x + iy$ est non nul (c'est-à-dire $x \neq 0$ ou $y \neq 0$), l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\dfrac{1}{i} = -i$. En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.
Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$ (la suite $n \mapsto i^n$ est périodique de période quatre).

3.1.2 Plan complexe. Affixe d'un point, d'un vecteur

On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.
Chaque point M de $\mathcal{P}$ est donc désigné par un unique couple de coordonnées (x, y) dans ce repère.
Pour cette raison, on parlera souvent du plan Oxy, du point $M(x, y)$, des axes Ox et Oy, etc.

Définition 3.1.4
L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe $M(x, y)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur le plan Oxy.
On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.
On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.
Le plan Oxy, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.
Le vecteur $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* de $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$).

Bien sûr, à la partie réelle et à la partie imaginaire d'un nombre complexe z correspondent donc l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(0, e_1, e_2)$.
Remarque : on dit « une affixe » et non « un affixe ». Il est prudent de dire « l'affixe ».

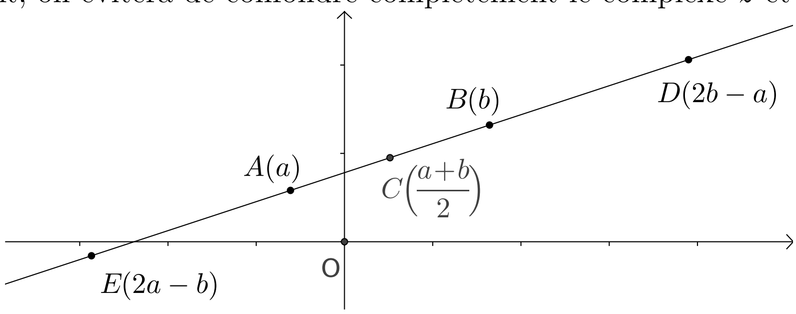
L'identification entre $\mathbb{C}$ et le plan muni d'un repère orthonormé permet :

– d'interpréter les propriétés de $\mathbb{C}$ dans un langage géométrique (jusqu'à résoudre avec les outils de la géométrie des problèmes posés initialement en termes de nombres complexes).

– de traduire des notions de géométrie du plan dans le langage algébrique des nombres complexes (jusqu'à résoudre par le calcul des problèmes énoncés en termes purement géométriques).

Par exemple :
– L'axe Ox (resp. Oy) est l'ensemble des points images des nombres réels (resp. des imaginaires purs).
– Si A, B ont pour affixes a, b alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$, et le milieu Ω de $[A;B]$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$.
– Si A, B, C, D sont quatre points du plan Oxy, d'affixes respectives a, b, c, d, alors $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $b-a=c-d$, ou encore $a+c=b+d$
– Si A, B sont deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b, la droite (AB) est l'ensemble des points $M(z)$, où $z = a+\lambda(b-a) = (1-\lambda)a+\lambda b$, avec λ réel.
De même le segment $[A;B]$ est l'ensemble des points $M(z)$, où $z = a+\lambda(b-a)$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Soit u un élément de $\mathbb{C}^*$, et soit $\overrightarrow{u}$ son vecteur image.
La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des $M(z = a+\lambda u)$, avec λ dans $\mathbb{R}$.
– L'isobarycentre des points $M_k(z_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ est le point G d'affixe $g = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

Même si c'est tentant, on évitera de confondre complètement le complexe z et le point M d'affixe z.



On a représenté ici deux points $A(a)$ et $B(b)$ et quelques points de la droite (AB) : le milieu C du segment $[A;B]$, le symétrique D de A par rapport à B, et le symétrique E de B par rapport à A.

3.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3.1.5
Soit $z = x+iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
Le nombre complexe $\overline{z} = x-iy$ est appelé le *conjugué* de z.
On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \to \overline{z}$.

Proposition 3.1.3
La conjugaison vérifie les propriétés suivantes :
Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a : $\overline{\overline{z}} = z$ (on dit que la conjugaison est une opération involutive)
Pour tous z_1, z_2 de $\mathbb{C}$, on a : $\begin{cases} \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \end{cases}$ (la conjugaison est compatible avec les opérations)

Remarques

– Les propriétés précédentes se généralisent à une somme ou à un produit fini.
Ainsi, pour tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

– Pour tout z complexe, on note les égalités $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
On en déduit que z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
De même, z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

3.1.4 Notion de transformations du plan complexe

Définition 3.1.6
Soit g une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (définie éventuellement sur une partie de $\mathbb{C}$.)
Il lui correspond de façon unique l'application f du plan dans lui-même, qui au point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = g(z)$.
L'application $f : m(z) \mapsto M(Z)$ est appelée *transformation du plan complexe.*

Cas particuliers simples

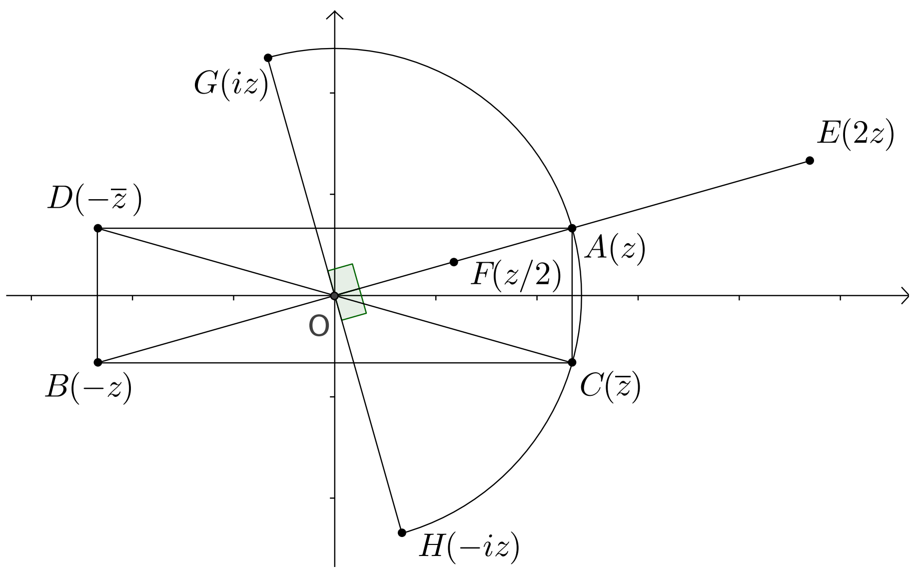
– L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = z + a)$ $(a \in \mathbb{C})$ est la translation de vecteur le vecteur image de a.

– L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = -z)$ est la symétrie par rapport au point O.
Plus généralement la symétrie de centre $A(a)$ est donnée par $f : m(z) \mapsto M(Z = 2a - z)$.

– L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = \overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.
L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy.

– L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = \lambda z)$, avec λ réel, est l'homothétie de centre O et de rapport λ.
L'homothétie de centre $A(a)$ et de rapport λ réel est donnée par $f : m(z) \mapsto Z = a + \lambda(z - a)$.

– L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = -iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$.



On a représenté ci-dessus un point $A(z)$, et un certain nombre de points qui lui sont liés : le point B d'affixe $-z$, le point C d'affixe $\overline{z}$, et les points $D(-\overline{z})$, $E(2z)$, $F(z/2)$, $G(iz)$ et $H(-iz)$.

3.2 Module et distance dans le plan complexe

3.2.1 Module d'un nombre complexe

Définition 3.2.1
Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe. La quantité $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelée *module* de z.

Relation entre le module et le conjugué

On constate que $z\overline{z} = |z|^2$. Cette égalité est (utile pour se « débarrasser » du module.

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z s'écrit $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue. Les notations $|\ |$ (valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et module dans $\mathbb{C}$) sont donc « compatibles ».

Module d'un produit, d'un quotient

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, on a : $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|zz'| = |z|\,|z'|$

Plus généralement, on a $z_1, \ldots, z_n$, on a : $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$, et notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

Si $z \neq 0$, alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Inégalité triangulaire

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$, on a : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (avec égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$).

Cette inégalité se complète en : $\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z \pm z'|$.

On peut donc écrire l'encadrement : $\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Conséquence : si $|z| \leqslant k < 1$, alors $1 - k \leqslant |1 + z| \leqslant 1 + k$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a aussi : $\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

Généralisation au module d'une somme de n nombres complexes

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes quelconques. Alors $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

L'inégalité précédente est une égalité si et seulement les z_k sont les produits de l'un d'entre eux par des réels positifs (c'est-à-dire, géométriquement, si les $M_k(z_k)$ sont sur une même demi-droite issue de O).

Module du carré d'une somme

Voici comment on peut développer le carré du module d'une somme (ou d'une différence) :

Pour tout u et v de $\mathbb{C}$: $\begin{cases} |u + v|^2 = |u|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u\,\overline{v}) + |v|^2 \\ |u - v|^2 = |u|^2 - 2\,\mathrm{Re}(u\,\overline{v}) + |v|^2 \end{cases}$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient : $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2\big(|u|^2 + |v|^2\big)$.

Tout ça se généralise : on a en effet $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Re}(z_j\,\overline{z_k})$.

3.2.2 Distance dans le plan complexe

Proposition 3.2.1 (Distance dans $\mathbb{C}$)
Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ d(z, z') = |z - z'|$.
L'application d est une distance *sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :*
Pour tous nombres complexes u, v, w :
$d(u, v) \geqslant 0$; $\quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $\quad d(u, v) = d(v, u)$.
$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$ *(inégalité triangulaire)*

Interprétation géométrique (dans le plan Oxy)

Bien sûr $d(z, z') = |z' - z|$ est la distance, dans le plan, entre $M(z)$ et $M'(z')$.

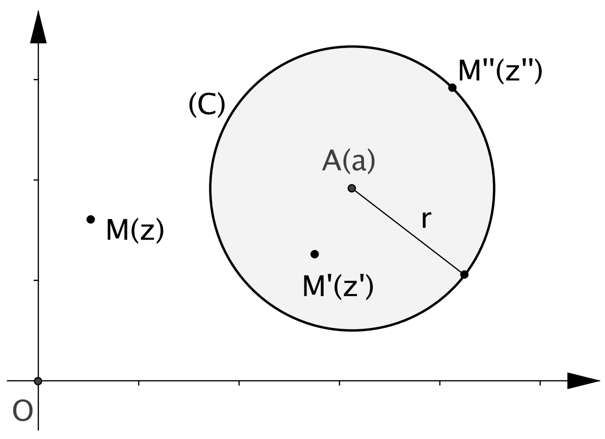
Les propriétés précédentes se comprennent alors aisément en termes géométriques.

Par exemple, si on note $U(u)$, $V(v)$, et $W(w)$, on a l'égalité $|w - u| = |w - v| + |v - u|$ si et seulement si $UW = UV + VW$, c'est-à-dire si et seulement si W est un élément du segment $[U; W]$. Cela équivaut à dire qu'il existe un réel λ dans $[0, 1]$ tel que $v = \lambda u + (1 - \lambda)w$.

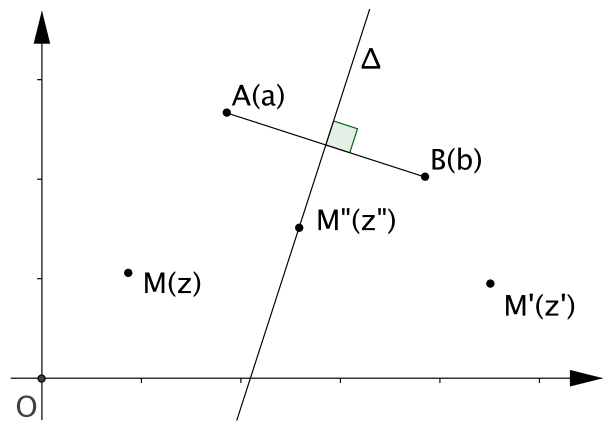
Propriétés géométriques liées au module

On note ici A et B deux points du plan, d'affixes respectives a et b. Soit r un réel positif ou nul.

- L'égalité $|z - a| = r$ caractérise les points $M(z)$ du cercle de centre A et de rayon r.
- L'inégalité large $|z - a| \leqslant r$ caractérise les points $M(z)$ du disque fermé de centre A et de rayon r.
  L'inégalité stricte $|z - a| < r$ caractérise les points $M(z)$ du disque ouvert de centre A et de rayon r.
- Bien sûr les inégalités $|z - a| \geqslant r$ (ou $|z - a| > r$) caractérisent les points $M(z)$ qui sont à l'extérieur (largement, ou strictement) du cercle de centre A et de rayon r.
- L'égalité $|z - a| = |z - b|$ caractérise les points $M(z)$ de la médiatrice Δ du segment $[A; B]$.
  Enfin $|z - a| < |z - b|$ caractérise les $M(z)$ du demi-plan ouvert délimité par Δ et contenant A.



(C) est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.
$M''(z'')$ est sur (C) car $|z'' - a| = r$.
$M'(z')$ est intérieur à (C) car $|z' - a| < r$.
$M(z)$ est extérieur à (C) car $|z - a| > r$.



Δ est la médiatrice du segment $[A; B]$.
$M''(z'')$ est sur Δ car $|z'' - a| = |z'' - b|$.
$M(z)$ et $M(z')$ sont de part et d'autre de Δ.
$|z - a| < |z - b|$ (ou encore $AM < BM$)
$|z' - a| > |z' - b|$ (ou encore $AM' > BM'$)

3.2.3 Nombres complexes de module 1

Définition 3.2.2
On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

À cette définition algébrique correspondent des définitions géométriques :

Définition 3.2.3
On appelle « cercle unité » (ou encore « cercle trigonométrique ») le cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| = 1$ (c'est-à-dire avec z dans $\mathcal{U}$).

On appelle « disque unité ouvert » l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$ (c'est l'intérieur, au sens strict, du cercle unité).

On appelle « disque unité fermé » l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| \leqslant 1$ (c'est l'intérieur, au sens large, du cercle unité).

Stabilité de $\mathcal{U}$ par produit

– Pour tous z de $\mathbb{C}^*$, on a $|z| = 1$ (c'est-à-dire z est dans $\mathcal{U}$) si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
– Si z et z' sont dans $\mathcal{U}$, il en est de même de $\overline{z}$, de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$, et de z^n, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Une construction intéressante

Supposons $|z| > 1$, c'est-à-dire supposons que $M(z)$ est extérieur au disque unité fermé.

Dans ces conditions, les deux points $N\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $P\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$ appartiennent au disque unité ouvert.

On a : $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{|z|^2} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^2} \Rightarrow OP{\cdot}OM = 1$

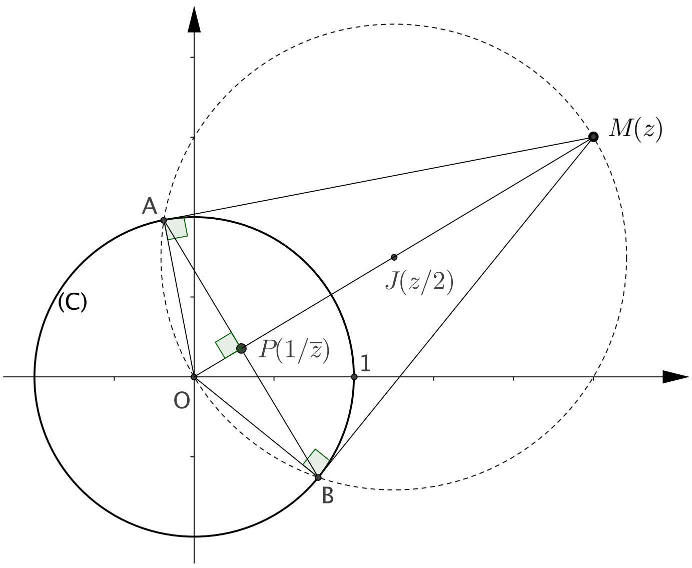
M, P sont donc sur une demi-droite issue de O.

Plus précisément, on a la construction suivante qui permet de passer de M à P, et inversement.

Le cercle de diamètre $[O; M]$ coupe le cercle unité (C) en deux points A, B (les points d'appuis des tangentes à (C) issues de M).

Le segment $[A; B]$ recoupe le segment $[O; M]$ orthogonalement au point P d'affixe $1/\overline{z}$.

Bien sûr le point d'affixe $1/z$ est le symétrique de P par rapport à l'axe Ox.



Pour justifier cette construction, on utilise des relations dans des triangles rectangles :
$OM^2 = 1 + AM^2 = 1 + AP^2 + PM^2 = 2 - OP^2 + (OM - OP)^2 = OM^2 - 2(OP \cdot OM - 1)$

Il en résulte l'égalité $OP \cdot OM = 1$. Donc si z est l'affixe de M, celle de P est $\dfrac{1}{\overline{z}}$.

3.3 Trigonométrie circulaire

3.3.1 Une « définition » des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$, $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$

Paradoxalement, il faut attendre la deuxième année de classe préparatoire pour une définition « rigoureuse » des fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$.

On se contentera d'une définition intuitive qui consiste à « enrouler » sur le cercle unité l'axe vertical Δ passant par $A(1)$ et orienté vers le haut, comme indiqué ici.

On note e^{it} (et c'est une *définition*) l'affixe du point M' sur lequel vient s'enrouler un point $M(1+it)$ de Δ.

On note π le demi-périmètre du cercle unité (considérons ça comme la *définition* de π !). Le point $C(1+i\pi)$ s'enroule alors sur le point C' d'affixe -1.

On a ainsi la remarquable *égalité d'Euler* $\boxed{\mathrm{e}^{i\pi}+1=0}$

De même on observe que :

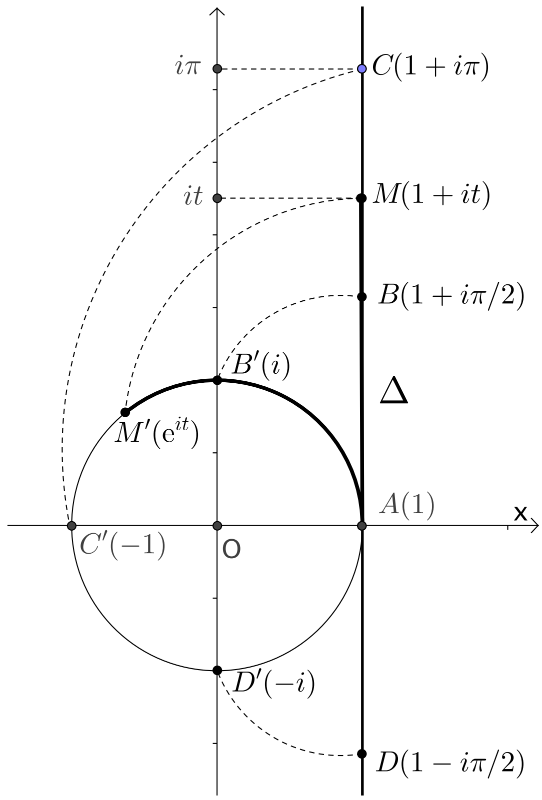
$\mathrm{e}^{i\pi/2}=i$ (le point B vient s'enrouler en B')

$\mathrm{e}^{-i\pi/2}=-i$ (le point D vient s'enrouler en D')

$\mathrm{e}^{2i\pi}=1$ (après un tour complet, le point d'ordonnée 2π sur Δ vient s'enrouler en A).

Pour tout réel t, on pose $\boxed{\mathrm{e}^{it}=\cos t+i\sin t}$

Cela constitue une *définition* des fonctions cos et sin.



La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ vérifie la relation fondamentale : $\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{i(x+y)}}$

Le figure ci-contre illustre cette propriété.

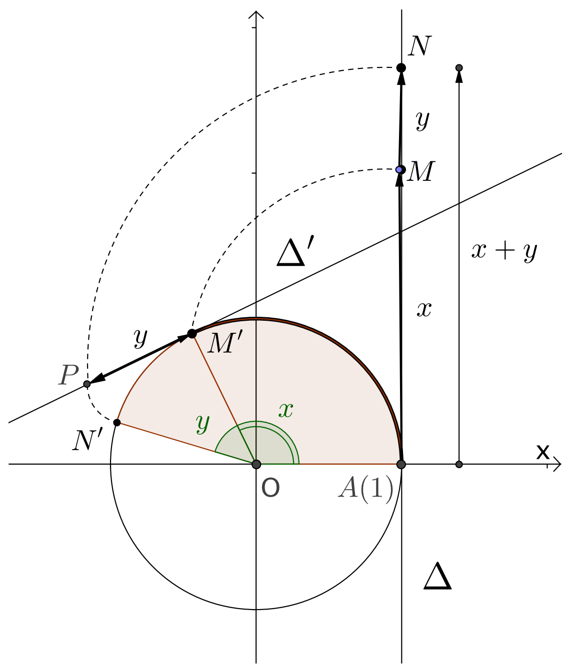
La translation de hauteur x, de A à M sur Δ, se traduit après enroulement en une rotation de centre 0 et d'angle x sur le cercle unité (x est en radians), et cette rotation envoie M sur M' (d'affixe e^{ix}).

Algébriquement, cette opération se traduit par la multiplication par e^{ix} (qui amène de 1 à e^{ix}).

La translation de hauteur $x+y$, de A à N sur Δ, se traduit en la rotation d'angle $x+y$ sur le cercle unité (de A à N'), qui traduit algébriquement par le produit par $\mathrm{e}^{i(x+y)}$ (qui amène de 1 à $\mathrm{e}^{i(x+y)}$).
On peut également enrouler Δ' à partir de M'.
La translation (sur Δ') qui envoie M' sur P se traduit par une rotation d'angle y qui envoie M' sur N' (ou encore, par la multiplication par e^{iy}).

Les deux rotations, d'angle x puis y, équivalent à la seule rotation d'angle $x+y$. Les deux produits, par e^{ix} puis e^{iy}, équivalent donc au seul produit par $\mathrm{e}^{i(x+y)}$.

L'égalité $\mathrm{e}^{i(x+y)}=\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy}$ en est la traduction.



3.3.2 Propriétés de l'application e^{it}

Les propriétés suivantes sont immédiates et traduisent la présentation qui vient d'être donnée de $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$:

Proposition 3.3.1

Pour tout réel x $\quad |\mathrm{e}^{ix}| = 1$, *c'est-à-dire :* e^{ix} *est élément de* $\mathcal{U}$.

Pour tout réel x : $\mathrm{e}^{ix} = 1$ *si et seulement si x est congru à 0 modulo 2π.*

En d'autres termes : $\mathrm{e}^{ix} = 1 \;\Leftrightarrow\; x \equiv 0\ [2\pi] \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi$.

Proposition 3.3.2 (périodicité de l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$)

Pour tous réels x et y, on a l'égalité fonctionnelle : $\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{i(x+y)}$.

L'application $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ est 2π-périodique : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{i(x+2\pi)} = \mathrm{e}^{ix}$.

Plus précisément, pour tous réels x et y : $\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{iy} \;\Leftrightarrow\; x \equiv y\ [2\pi] \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z},\ y - x = 2k\pi$

Pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{-ix} = \overline{\mathrm{e}^{ix}}$

Valeurs particulières :

$$\mathrm{e}^{i\pi/2} = i,\quad \mathrm{e}^{i\pi} = -1,\quad \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i,\quad \mathrm{e}^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\quad \mathrm{e}^{3i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),\quad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le résultat suivant est très important, et il sera illustré géométriquement en 3.4.2.

Proposition 3.3.3 (factorisation de $\mathrm{e}^{ix}+1$ et de $\mathrm{e}^{ix}-1$)

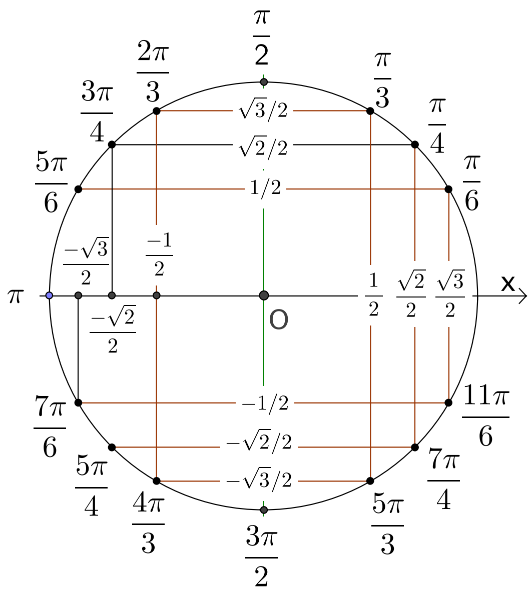
Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{ix} + 1 = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{ix/2}$, *et* $\mathrm{e}^{ix} - 1 = 2\,i\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{ix/2}$

3.3.3 Premières propriétés des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$

On rappelle qu'on a défini $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ par l'égalité $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ (ça n'est pas rigoureux à 100%, mais on s'en contentera). Les propriétés des applications $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ découlent de ce qui prédède (beaucoup sont assez évidentes, d'autres moins, mais on les tiendra toutes pour acquises !).

Valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Parité et périodicité

Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et elles sont 2π-périodiques.

L'application $x \mapsto \sin x$ est impaire et l'application $x \mapsto \cos x$ est paire.

Autrement dit, pour tout réel x : $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$

Égalités $\cos x = \cos \alpha$ et $\sin x = \sin \alpha$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $|\sin x| \leqslant 1$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2+b^2 = 1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \cos \alpha \\ b = \sin \alpha \end{cases}$ (α étant unique à 2π près)

Dans les notations suivantes, k est un entier relatif quelconque :

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ $\qquad$ $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

On a en particulier les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Dérivées successives

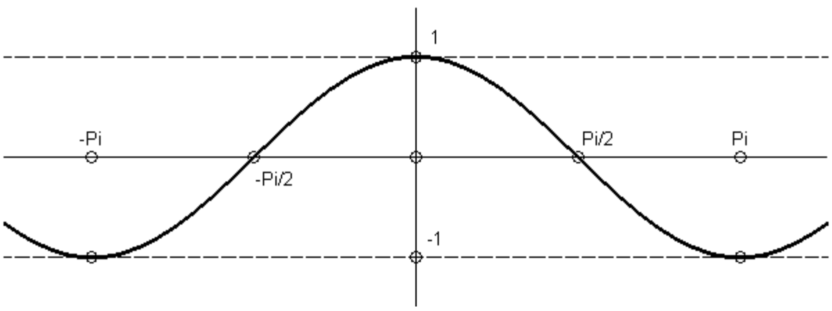
Les applications $\begin{cases} x \mapsto \sin x \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, et tout n de $\mathbb{N}$, on a :

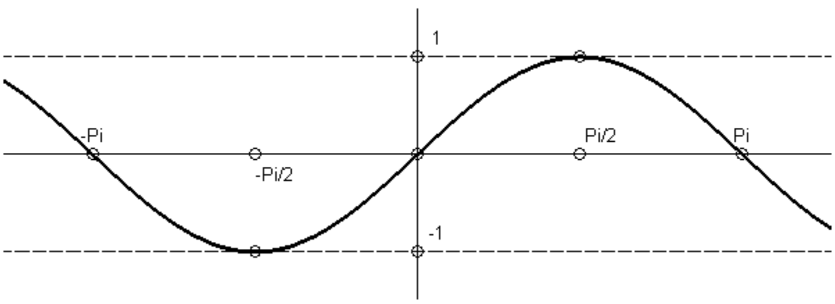
$$\begin{cases} \cos' x = -\sin x \\ \sin' x = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos'' x = -\cos x \\ \sin'' x = -\sin x \end{cases} \quad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Courbes représentatives

Courbe $y = \cos x$:



Courbe $y = \sin x$:



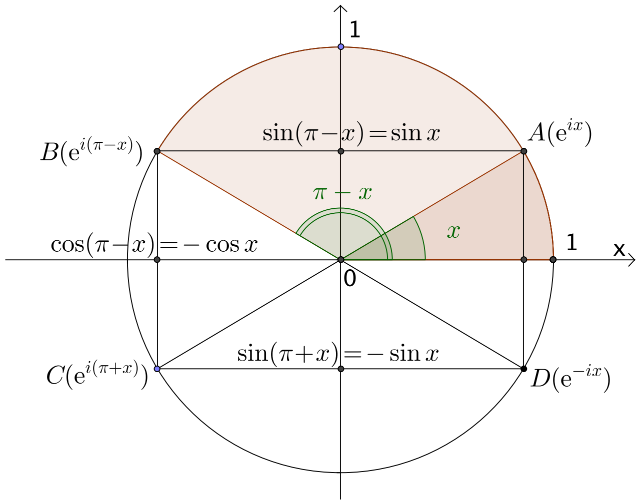
Passage de x à $\pi \pm x$ et à $\frac{\pi}{2} \pm x$

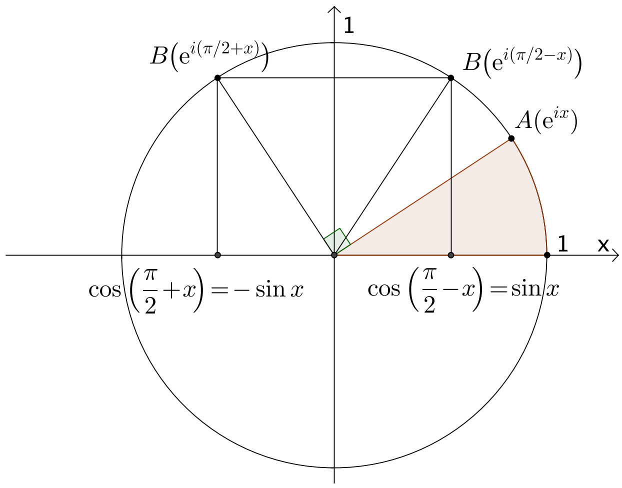
Pour tout réel x, on les égalités :

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Les relations précédentes se voient très bien sur le cercle unité (c'est comme ça qu'on les retrouve) :





Cosinus et sinus d'une somme ou d'une différence

Pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

Transformations de produits en sommes, et de sommes en produits

Pour tous réels x, y, p, et q :

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)) \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

3.3.4 Formules d'Euler, linéarisation

Proposition 3.3.4 (Formules d'Euler)

Pour tout réel x, on a les égalités : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, *et* $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Ces formules permettent de calculer les puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ en fonction de quantités du type $\cos(px)$ et/ou $\sin(px)$. Cette opération est appelée *linéarisation*.

Pour cela on développe $\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$, $\sin^n x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$, par la formule du binôme.

On termine en regroupant les termes équidistants des extrémités.

On réutilise alors les formules d'Euler pour retouver des $\cos(px)$ et/ou des $\sin(px)$.

Quelques exemples

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{4}\frac{1}{2i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}\frac{1}{2i}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{64}\left(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10\right)\end{aligned}$$

3.3.5 Utilisation de la formule de De Moivre

Proposition 3.3.5 (Formule de De Moivre)
Pour tout réel x, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{ix})^n = \mathrm{e}^{inx}$.
Autrement dit : Pour tout réel x, et pour tout entier n : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$.

Ce résultat permet, en développant $(\cos x + i\sin x)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de puissances de $\cos x$ et/ou $\sin x$. Pour obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\cos x$ (resp. de $\sin x$) on remplacera les puissances paires de $\sin x$ (resp. de $\cos x$) par des puissances de $(1-\cos^2 x)$ (resp. de $(1-\sin^2 x)$) puis de développer.

Quelques exemples

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\\ \sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)\\ \sin 3x = 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\end{cases}$$

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x\\ \sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2\\ \sin 4x = 4\cos x((1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\\ \sin 4x = 4\cos x(-2\sin^3 x + \sin x)\end{cases}$$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x$$
$$-10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x\\ \sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2\\ \sin 5x = 5(1-\sin^2 x)^2\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x\\ \sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{cases}$$

Dans ce dernier cas, la formule donnant $\sin 5x$ se déduit facilement de celle donnant $\cos 5x$.
En effet, en posant $x = \dfrac{\pi}{2} - y$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin\Big(\frac{5\pi}{2} - 5y\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - 5y\Big)\\ &= \cos 5y = 16\cos^5 y - 20\cos^3 y + 5\cos y = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

3.3.6 Deux sommes trigonométriques classiques

Pour x dans $\mathbb{R}$, et n dans $\mathbb{N}$, on pose : $C_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$, et $Z_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ikx}$.

On note bien sûr que $Z_n(x)=C_n(x)+iS_n(x)$, ou encore $C_n(x)=\mathrm{Re}(Z_n(x))$ et $S_n=\mathrm{Im}(Z_n(x))$.

D'autre part $Z_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ikx}$ s'écrit $Z_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}q^k$, avec $q=\mathrm{e}^{ix}$ (somme géométrique).

Cas particulier : si $x\equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire si $q=1$, alors $Z_n(x)=n+1$ donc $\begin{cases}C_n(x)=n+1\\ S_n(x)=0\end{cases}$

Cas général : on suppose $x\not\equiv 0\ [2\pi]$, donc $q\neq 1$.

Ainsi : $Z_n(x)=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{ix}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}}\,\dfrac{2\,i\sin((n{+}1)x/2)}{2\,i\sin(x/2)}=\mathrm{e}^{inx/2}\dfrac{\sin((n{+}1)x/2)}{\sin(x/2)}$

On en tire : $C_n(x)=\dfrac{1}{\sin(x/2)}\Big(\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}\Big)$ et $S_n(x)=\dfrac{1}{\sin(x/2)}\Big(\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}\Big)$

Autre méthode, avec une somme télescopique

$$\begin{aligned}\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)C_n(x)&=\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sin\frac{x}{2}\cos(kx)\Big)=\frac12\sum_{k=0}^{n}\Big(\sin\Big(k+\frac12\Big)x-\sin\Big(k-\frac12\Big)x\Big)\\&=\frac12\sum_{k=1}^{n+1}\sin\Big(k-\frac12\Big)x-\frac12\sum_{k=0}^{n}\sin\Big(k-\frac12\Big)x=\frac12\Big(\sin\Big(n+\frac12\Big)x+\sin\frac{x}{2}\Big)\end{aligned}$$

On en déduit : $\Big(\sin\dfrac{x}{2}\Big)C_n(x)=\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}$, et on retrouve l'expression de $C_n(x)$.

$$\begin{aligned}\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)S_n(x)&=\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sin\frac{x}{2}\sin(kx)\Big)=\frac12\sum_{k=0}^{n}\Big(\cos\Big(k-\frac12\Big)x-\cos\Big(k+\frac12\Big)x\Big)\\&=\frac12\sum_{k=0}^{n}\cos\Big(k-\frac12\Big)x-\frac12\sum_{k=1}^{n+1}\cos\Big(k-\frac12\Big)x=\frac12\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\Big(n+\frac12\Big)x\Big)\end{aligned}$$

On en déduit : $\Big(\sin\dfrac{x}{2}\Big)S_n(x)=\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}$, et on retrouve l'expression de $S_n(x)$.

3.3.7 La fonction tangente $x\mapsto\tan x$

Définition 3.3.1 (définition de la fonction tangente)

Pour tout réel x tel que $\cos x\neq 0$, c'est-à-dire tel que $x\neq\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on pose : $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Imparité et périodicité

Sur son domaine, l'application $x\mapsto\tan x$ est impaire et π-périodique : $\begin{cases}\tan(-x)=-\tan x\\ \tan(x+\pi)=\tan x\end{cases}$

Valeurs particulières, et égalités $\tan x = \tan \alpha$

On note les trois valeurs particulières : $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$, $\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Pour tout réel $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(\pi)$, on a l'équivalence : $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha\,(\pi)$.

En particulier : $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ [\pi]$, $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$, $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

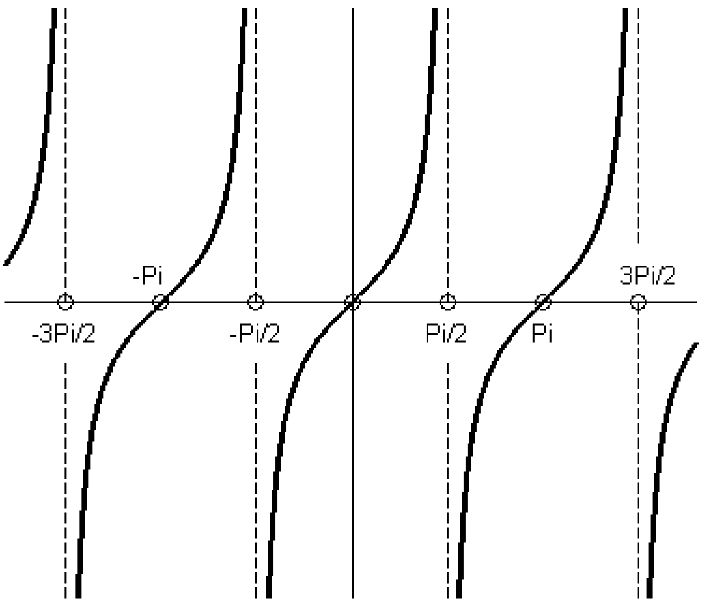
Dérivée et sens de variation de $x \mapsto \tan x$

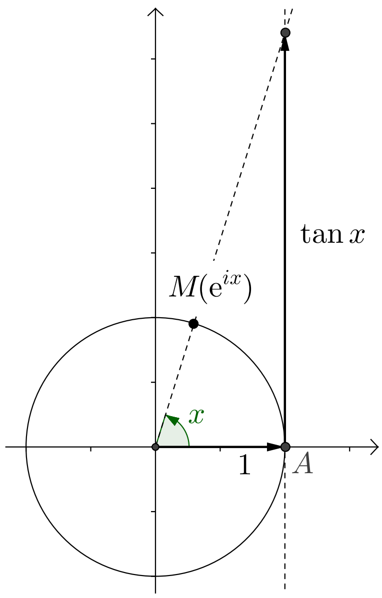
Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a : $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

L'application $x \mapsto \tan x$ est donc strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine.

Plus généralement, l'application $x \mapsto \tan x$ est indéfiniment dérivable sur son domaine.

Représentation graphique, et interprétation sur le cercle unité





Passage de x **à** $\pi - x$ **ou à** $\dfrac{\pi}{2} \pm x$

Les égalités suivantes se retrouvent très vite, notamment grâce à $\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right)$.

On retiendra : $\tan(\pi - x) = -\tan x$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$

Tangente d'une somme ou d'une différence

On retrouve les égalités suivantes à partir de celles sur $\sin(x \pm y)$ et $\cos(x \pm y)$:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Les identités relatives à la fonction tangente nécessitent une étude préalable du domaine de définition.

L'expression de $\tan(x+y)$, par exemple, suppose que x, y et $x+y$ soient différents de $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Utilisation du changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$

Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ est utile en calcul intégral.

Par exemple, en posant $\theta = \dfrac{x}{2}$: $\cos x = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

On retiendra qu'avec $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a : $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

3.4 Forme trigonométrique (polaire)

3.4.1 Module et argument d'un nombre complexe non nul

Proposition 3.4.1 (forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul)
Soit z un nombre complexe non nul.
Il existe un unique réel $\rho > 0$ et une unique classe de réels θ modulo 2π, telle que $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
On dit que cette écriture de z est sa « forme trigonométrique », ou encore sa « forme polaire ».
*Cette classe de réels modulo 2π est appelée l'*argument *de z.*
Chacun des réels θ de cette classe est appelée une détermination *de l'argument de z (ou, par abus de langage,* un *argument de z), et on note :* $\arg z = \theta\ [2\pi]$.

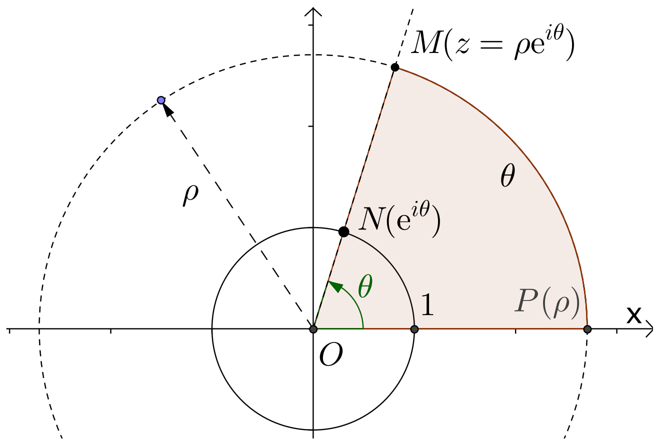
Interprétation dans le plan complexe

L'interprétation de l'écriture $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ est claire :
- Le réel $\rho > 0$ est le module de z
- θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$

Pour tout $z \neq 0$, il y a une unique détermination de l'argument dans tout intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi]$, et en particulier dans $]-\pi, \pi]$ (cette dernière étant appelé *détermination principale* de l'argument de z).

On a $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho = 0$ et pour tout réel θ.
Parler de l'argument de $z = 0$ n'a donc aucun sens.

La seule écriture $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ ne caractérise pas la forme polaire, car il faut imposer $\rho > 0$.
Si $\rho < 0$, la forme polaire de $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ est $(-\rho)\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$



Forme polaire et forme cartésienne

Soit z un nombre complexe non nul, écrit sous les deux formes $z = x + iy = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. Alors :

Dans un sens $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ et dans l'autre $\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$ (ce qui détermine ρ, et $\theta\ [2\pi]$)

On note que si $x \neq 0$ (donc si z n'est pas imaginaire pur), alors $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (ce qui détermine $\theta\ [\pi]$)

Si z n'est pas un réel négatif, alors $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+\rho}$ (ce qui détermine θ modulo 2π.)

Si $z \neq 0$, mais si on n'est pas certain du signe du réel ρ :

$z = \rho e^{i\theta} \;\Leftrightarrow\; \Big(\rho = |\,z\,| \text{ et } \arg z = \theta\ [2\pi]\Big) \text{ ou } \Big(\rho = -|\,z\,| \text{ et } \arg z = \theta + \pi\ [2\pi]\Big)$

Cas particuliers

Soit z un nombre complexe non nul.

On a les équivalences : $\begin{cases} z \text{ est réel} \;\Leftrightarrow\; \arg z = 0\ [\pi] \\ z \text{ est imaginaire pur} \;\Leftrightarrow\; \arg z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} z \in \mathbb{R}^{+*} \;\Leftrightarrow\; \arg z = 0\ [2\pi] \\ z \in \mathbb{R}^{-*} \;\Leftrightarrow\; \arg z = \pi (2\pi) \end{cases}$

3.4.2 Forme polaire et opérations dans $\mathbb{C}$

Proposition 3.4.2 (module et argument d'un produit)
Soient u, v deux complexes non nuls, écrits sous forme polaire $u = \rho\, e^{i\theta}$ et $v = r\, e^{i\varphi}$ $(\rho > 0, r > 0)$.
On a l'égalité : $u\, v = \rho\, r\, e^{i(\theta+\varphi)}$, qui s'écrit aussi $\begin{cases} |u\,v| = |u|\ |v| \\ \arg(uv) = \arg u + \arg v\ [2\pi] \end{cases}$

Cas particuliers

Avec les notations précédentes : $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\rho}\, e^{-i\theta}$, $\overline{u} = \rho\, e^{-i\theta}$, et $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\rho}{r}\, e^{i(\theta-\varphi)}$

En termes d'arguments, on obtient donc : $\arg \dfrac{1}{u} = \arg \overline{u} = -\arg u\ [2\pi]$, et $\arg \dfrac{u}{v} = \arg u - \arg v\ [2\pi]$.

Pour tout n de $\mathbb{Z}$, on a $u^n = \rho^n\, e^{in\theta}$ et il en résulte : $\arg u^n = n \arg u\ [2\pi]$.

On a bien sûr : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arg \lambda u = \arg u\ [2\pi]$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{-*}$, $\arg \lambda u = \arg u + \pi\ [2\pi]$.

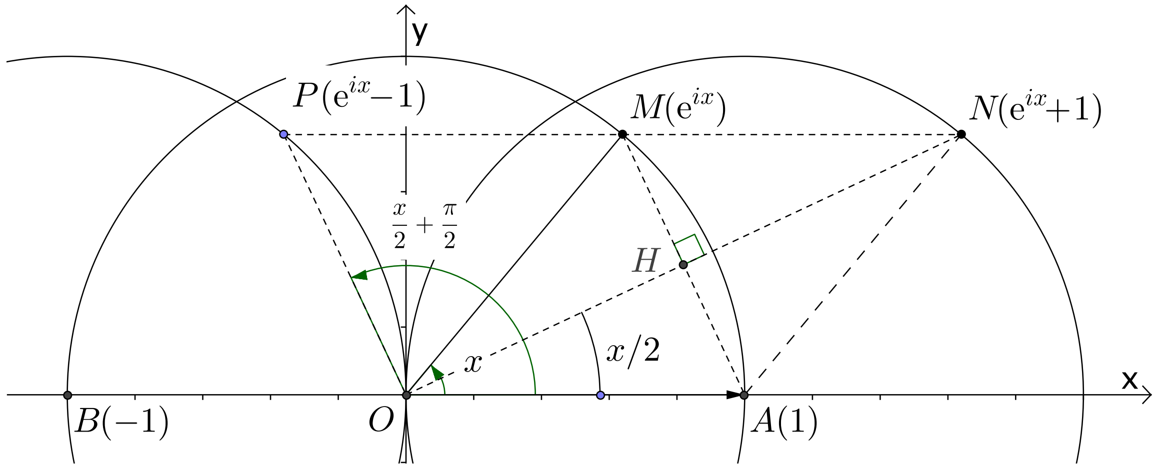
Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire devient : $|u+v| = |u| + |v| \;\Leftrightarrow\; \arg u = \arg v\ [2\pi]$.

Illustration des factorisations de $e^{ix} \pm 1$

On rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} + 1 = 2\cos\Big(\dfrac{x}{2}\Big) e^{ix/2}$, et $e^{ix} - 1 = 2\, i \sin\Big(\dfrac{x}{2}\Big) e^{ix/2}$.

Voici un schéma pour bien comprendre la signification géométrique des deux résultats précédents.

- On note M le point d'affixe e^{ix} sur le cercle unité.
  On suppose ici que x est strictement compris entre 0 et π.
- On applique à ce cercle (donc à M) la translation de vecteur $(1, 0)$ et la translation de vecteur $(-1, 0)$.
- Quand M décrit le cercle unité, son image N dans la translation de vecteur $(1, 0)$ a pour affixe $e^{ix} + 1$ et parcourt le cercle de centre $A(1)$ et de rayon 1. L'image P de M dans la translation de vecteur $(-1, 0)$ a pour affixe $e^{ix} - 1$ et parcourt le cercle de centre $B(-1)$ et de rayon 1.
- On note que $(\widehat{Ox, \overrightarrow{ON}}) = \dfrac{x}{2}$ et $ON = 2OH = 2\cos \dfrac{x}{2}$. Ainsi $|e^{ix} + 1| = 2\cos \dfrac{x}{2}$ et $\arg \Big(e^{ix} + 1\Big) = \dfrac{x}{2}$.
  De même, on voit bien que $(\widehat{Ox, \overrightarrow{OP}}) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et $OP = 2HM = 2\sin \dfrac{x}{2}$.
  On en déduit $|e^{ix} - 1| = 2\sin \dfrac{x}{2}$ et $\arg \Big(e^{ix} - 1\Big) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.



Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$

On se donne (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, différent du couple nul, et x dans $\mathbb{R}$. Soit $A=\sqrt{a^2+b^2}$ (donc $A>0$).

Il existe un réel φ (défini de façon unique modulo 2π) tel que : $\dfrac{a}{A}=\cos\varphi$ et $\dfrac{b}{A}=\sin\varphi$.

Avec ces notations :

$$a\cos x + b\sin x = A\Big(\frac{a}{A}\cos x + \frac{b}{A}\sin x\Big) = A(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi) = A\cos(x-\varphi)$$

Une autre approche est d'introduire $z=e^{ix}=\cos x + i\sin x$ et $\omega = a+ib = A\,e^{i\varphi}$.

On a en effet simultanément : $z\,\overline{\omega} = (\cos x + i\sin x)(a-ib)$ et $z\,\overline{\omega} = A\,e^{i(x-\varphi)}$.

On en déduit, en prenant les parties réelles : $\mathrm{Re}(z\,\overline{\omega}) = a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\varphi)$.

Il y a une troisième approche, plus géométrique.

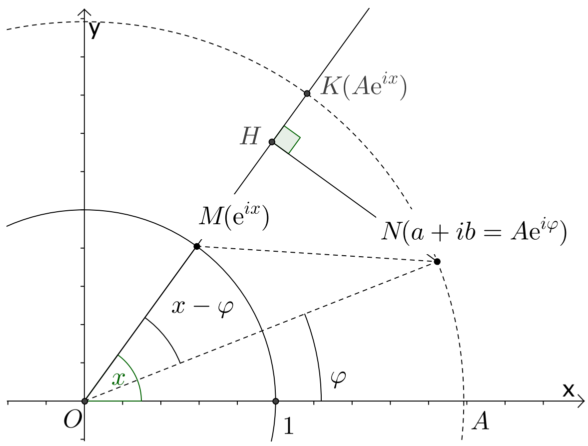
On peut en effet considérer que $a\cos x + b\sin x$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{ON}(a,b)$ et $\overrightarrow{OM}=(\cos x,\sin x)$.

Le point N se projette en H sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = \overline{OH} = \|\overrightarrow{OM}\|\,\|\overrightarrow{ON}\|\cos\big(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}\big)$

c'est-à-dire : $a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\varphi)$

Si on fixe x (c'est-à-dire M) et qu'on fait varier N sur le cercle de centre 0 et de rayon A, la projection H de N sur (OM) décrit le segment de centre O et dont une extrémité est le point K d'affixe Ae^{ix}.



3.4.3 Interprétation géométrique du produit

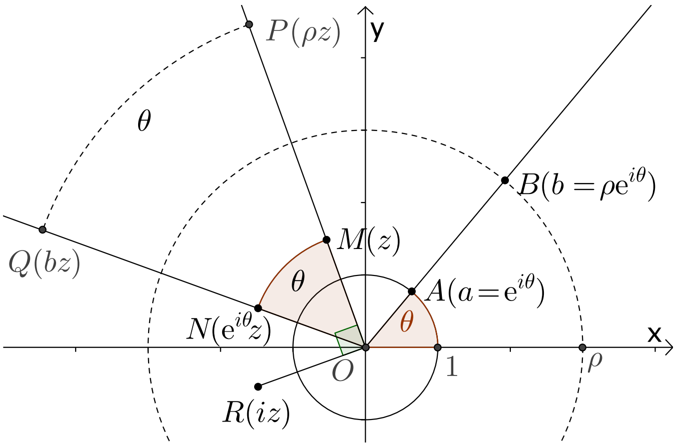
Soit $M(z)$ un point quelconque du plan, d'affixe z.

Soit $a=e^{i\theta}$ et $b=\rho e^{i\theta}$, avec $(\rho>0)$. On définit les points $A(z)$ et $B(b)$.

On passe de $M(z)$ à $P(\rho z)$ par l'homothétie h de centre O de rapport ρ, et de $M(z)$ à $N(e^{i\theta}z)$ par la rotation r de centre O et d'angle θ.

On passe de $M(z)$ à $Q(bz)$ par la composée $f=h\circ r = r\circ h$ (on dit que f est la *similitude directe* de centre 0, de rapport ρ, d'angle θ).

En particulier, $R(iz)$ se déduit de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



3.5 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

3.5.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 3.5.1
Tout nombre complexe non nul Z admet exactement deux racines carrées, et elles sont opposées.

Méthode algébrique :

On pose $Z = A + iB$, et on cherche $z = x + iy$, avec A, B, x, y dans $\mathbb{R}$.

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ 2xy = B \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ x^2 + y^2 = |Z| \\ 2xy = B \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{|Z| + A}{2} \\ y^2 = \dfrac{|Z| - A}{2} \\ 2xy = B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \varepsilon\sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ y = \varepsilon'\sqrt{\dfrac{|Z| - A}{2}} \end{cases} \text{avec } \varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}, \text{ et } \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } B$$

Par exemple : :

Si $Z = 7 - 24i$ (donc $|Z| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$), et en posant $z = x + iy$:

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -24 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} (x = 4 \text{ et } y = -3) \\ \text{ ou } (x = -4 \text{ et } y = 3) \end{cases}$$

Les deux racines carrées de $Z = 7 - 24i$ sont donc $z_1 = 4 - 3i$ et $z_2 = -z_1 = -4 + 3i$.

Méthode trigonométrique :

On pose $Z = R\mathrm{e}^{i\varphi}$ et $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $R > 0, \rho > 0$, et φ, θ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple :

Si $Z = 2\sqrt{3} + 2i = 4\mathrm{e}^{i\pi/6}$, et en posant $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$:

$$z^2 = Z \iff \rho^2\mathrm{e}^{2i\theta} = 4\mathrm{e}^{i\pi/6} \iff \left(\rho = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{12}\ [\pi]\right) \iff \left(z = 2\mathrm{e}^{i\pi/12} \text{ ou } z = 2\mathrm{e}^{7i\pi/12}\right)$$

3.5.2 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

On considère l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $a \neq 0$.

On appelle *discriminant* de (E) le nombre complexe : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Mise sous forme canonique :

$$(E) : az^2 + bz + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Cas où le discriminant est nul :

Si $\Delta = 0$, alors $(E) \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\dfrac{b}{2a}$ (on parle de « racine double ».

Cas où le discriminant est non nul :

Si $\Delta \neq 0$, soit δ l'une des deux racines carrées (distinctes et opposées) de Δ (ne pas noter $\sqrt{\Delta}$!!)

Alors $(E) \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\delta}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\delta}{2a}\right) = 0$

Dans ce cas (E) a donc deux racines *distinctes* dans $\mathbb{C}$: $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Somme et produit des racines :

Dans tous les cas, la somme des racines est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.

Inversement, si u, v sont cherchés dans $\mathbb{C}$, et si S, P sont donnés dans $\mathbb{C}$,

On a l'équivalence : $\begin{cases} u+v = S \\ uv = P \end{cases} \Leftrightarrow \{u, v\}$ est l'ensemble des racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

Utilisation du *discriminant réduit*

Si le coefficient b s'écrit manifestement $b = 2b'$, on peut utiliser le $\Delta' = b'^2 - ac$.

Les solutions de (E) s'écrivent alors : $z = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$ et $z = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$ où $\delta'^2 = \Delta'$.

Cas de l'équation du second degré à coefficients réels

Si (a, b, c) sont réels, le cas $\Delta \neq 0$ se subdivise en $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$

Si $\Delta > 0$, les deux solutions de (E) sont réelles et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, elles sont non réelles, conjuguées l'une de l'autre et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

3.6 Racines n-ièmes

3.6.1 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout cette sous-section, on désigne par n un entier strictement positif.

Définition 3.6.1

On appelle racines n-ièmes de l'unité les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 3.6.1

L'ensemble $\mathcal{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est formé de n nombres complexes distincts.

Les éléments de $\mathcal{U}_n$ sont donnés par par $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

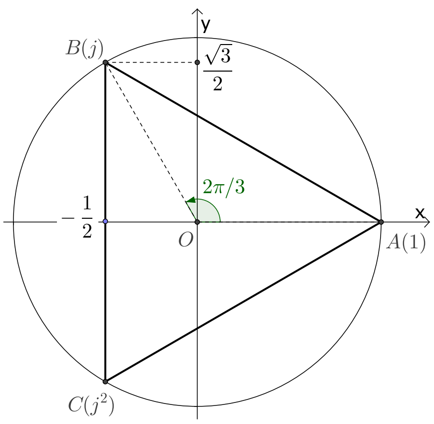
Si on note $\omega = \omega_1 = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$, alors pour tout k : $\omega_k = \omega^k$ (en particulier $\omega_0 = 1$).

Autrement dit, avec ces notations : $\mathcal{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.

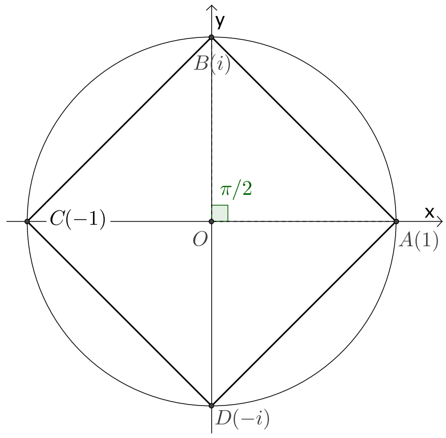
Cas particuliers

- La seule racine « une-ième » de l'unité est $z = 1$ (donc $\mathcal{U}_1 = \{1\}$).
- Les deux racines carrées (ou secondes, ou deuxièmes) de l'unité sont 1 et -1 (donc $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$).
- Les trois racines cubiques (ou troisièmes) de l'unité sont $1, j, j^2$ avec $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ (donc $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$).
- Les racines quatrièmes de l'unité sont : $1, i, -1, -i$ (donc $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$).
- Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$ (donc $\mathcal{U}_5 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^5\}$).
- Les racines sixièmes de l'unité sont : $1, \mathrm{e}^{i\pi/3} = -j^2,\ j,\ -1,\ j^2$, et $-j$.

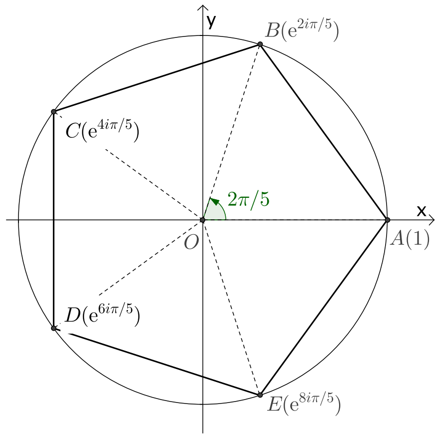
Proposition 3.6.2 (disposition dans le plan complexe)
Les points images des racines n-ièmes de l'unité forment les n sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité, l'un de ces sommets étant le point d'affixe 1.



racines cubiques de 1



racines quatrièmes de 1



racines cinquièmes de 1

L'ensemble des points-images des racines sixièmes de l'unité forme bien sûr un hexagone régulier de sommet 0, dont un sommet est $A(1)$, et on fera soi-même le dessin !

Remarques

- Le nombre $z = -1$ est une racine n-ième de l'unité si et seulement si n est pair
- Les racines n-ièmes de l'unité apparaissent dans la factorisation : $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$.
- Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
- Considérons l'équation $(E) : z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.
  Les solutions de (E) sont les $n - 1$ racines racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.
- En particulier : les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$ sont j et j^2.
  Concernant le nombre $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on retiendra $j^2 + j + 1 = 0$, $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$.

Le groupe des racines n-ièmes de l'unité

Proposition 3.6.3

Si z et z' sont dans $\mathcal{U}_n$, il en est de même de zz' et de $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

On exprime ces propriétés (stabilité par le produit et par le passage à l'inverse) en disant de $\mathcal{U}_n$ qu'il est le « groupe des racines n-ièmes de l'unité ».

On sait que $\mathcal{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$, avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

On exprime cette propriété en disant que ω « engendre » le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

On peut vérifier que les autres « générateurs » de $\mathcal{U}_n$ sont les ω_k, quand k est premier avec n.

3.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 3.6.2

Soit Z un nombre complexe non nul, et n un entier strictement positif.

On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition 3.6.4

Soit $Z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ la forme trigonométrique de Z (avec $\rho > 0$).

Z possède n racines n-ièmes, données par : $z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{i\theta_k}$, où $\theta_k = \dfrac{\theta}{n} + 2k\dfrac{\pi}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

La méthode est la suivante, en cherchant z sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ $(r > 0)$:

$$z^n = Z \;\Leftrightarrow\; r^n \mathrm{e}^{in\varphi} = \rho \mathrm{e}^{i\theta} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi \equiv \dfrac{\theta}{n}\ (\dfrac{2\pi}{n}) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$$

Remarques :

- Rappelons que $\mathcal{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$, avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$, estl'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Il s'agit donc d'un cas particulier du problème des racines n-ièmes d'un élément Z de $\mathbb{C}^*$.

  Mais inversement, si z_0 est une racine n-ième de Z, on les obtient toutes par $z_k = \omega_k z_0$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. On obtient donc les racines n-ièmes de Z en multipliant l'une d'elles par les racines n-ièmes de 1.
- Les points images M_k de ces n racines n-ièmes sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$.
- Les n racines n-ièmes z_k de Z apparaissent dans la factorisation : $z^n - Z = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$.
- La somme des n racines n-ièmes z_k de Z est nulle (si $n \geqslant 2$)

Proposition 3.6.5 (disposition dans le plan complexe)

Soit Z un nombre complexe non nul, et n un entier (avec $n \geqslant 2$). Les points images des racines n-ièmes de Z forment les n sommets d'un polygône régulier convexe de centre O.

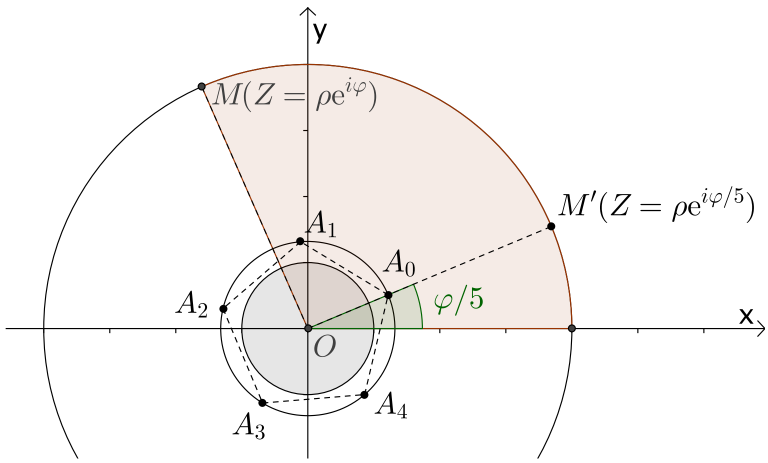
On illustre ici le cas d'un complexe Z de module $|Z| > 1$ (en fait $|Z| = 1$).

On a représenté les points $A_0, \ldots, A_4$ images des racines cinquièmes de Z.

On a posé $\arg Z = \varphi\ [2\pi]$.

On a ici $\left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA_0}}\right) = \dfrac{\varphi}{5}\ [2\pi]$.

Le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ se déduit, par rotation de centre O d'angle $\varphi/5$, et homothétie de centre O de rapport $\sqrt[5]{|Z|}$, du pentagone (non dessiné) des points-images des racines cinquièmes de 1.



3.6.3 Généralisation (admise) aux racines des polynômes

Dans cette sous-section, dont les résultats sont admis, on note $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$ (donc ici $a_n \neq 0$), dont les coefficients a_k sont dans $\mathbb{C}$.

Les résultats suivants généralisent (considérablement) ce qui a été vu pour les racines n-ièmes d'un nombre complexe a (en effet, il suffit de considérer la fonction polynomiale $z \mapsto z^n - a$).

- La fonction polynomiale $P(z)$ se factorise en le produit de n fonctions polynomiales de degré 1.
- L'équation $P(z) = 0$ admet donc exactement n solutions, chacune étant répétée « autant de fois que sa multiplicité » (il peut y avoir des racines simples, des racines doubles, etc.)
- Dans le cas où les coefficients a_k sont réels, on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ pour tout z. Il en résulte que si α est une racine de P, avec la multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P, et avec la même multiplicité.

3.7 Exponentielle complexe

3.7.1 Définition de e^z pour z dans $\mathbb{C}$

Définition 3.7.1

Soit $z = x + iy$ (avec x, y dans $\mathbb{R}$) un nombre complexe.

On pose $\exp(z) = e^x\, e^{iy}$, quantité également notée e^z.

On définit ainsi une application $z \mapsto \exp(z)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée *exponentielle complexe*.

Premières propriétés :

- La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $z \to \exp(z)$ est l'exponentielle réelle déjà connue.
  De même, sa restriction aux imaginaires purs est l'application $i\theta \to e^{i\theta}$ définie précédemment.
- Pour tout complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) on a, par définition : $\begin{cases} |\exp(z)| = e^x \\ \arg(\exp(z)) = y\ [2\pi] \end{cases}$
  En particulier, $\exp(z)$ n'est jamais nul.
  On note également que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $= \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.
- On constate l'équivalence : $\exp(z) = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$.

3.7.2 Propriétés de la fonction exponentielle

Proposition 3.7.1 (relation fonctionnelle fondamentale)
Pour tous nombres complexes z et z', on a l'égalité : $\exp(z+z') = \exp(z)\,\exp(z')$.
On en déduit que, pour tout z de $\mathbb{C}$: $\exp(z)$ *est non nul et* $\dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

Proposition 3.7.2 (périodicité de la fonction exponentielle complexe)
On a l'équivalence : $\exp(z) = \exp(z') \;\Leftrightarrow\; (\exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi) \;\Leftrightarrow\; z \equiv z'\ (2i\pi)$.
L'application exponentielle $z \mapsto \exp(z)$ *est donc périodique de période* $2i\pi$.

Images d'une droite par la fonction exponentielle

Pour illustrer les propriétés suivantes, on est prié de faire un dessin !

- Quand $M(z = iy)$ décrit l'axe des imaginaires purs (la droite verticale $x = 0$), dans le sens des ordonnées y croissantes, le point $M(\exp(z))$ décrit le cercle trigonométrique (dans le sens trigonométrique).
- Plus généralement, quand $M(z = x_0 + iy)$ décrit la droite verticale $x = x_0$ (suivant les y croissants), le point $M(\exp(z))$ décrit le cercle de centre 0 et de rayon $R = \mathrm{e}^{x_0}$ (dans le sens trigonométrique). Si $x_0 < 0$ (resp $x_0 > 0$), on est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du cercle trigonométrique.
- Quand $M(z = x)$ décrit l'axe réel (la droite $y = 0$), dans le sens des x croissants, le point $M(\exp(z))$ décrit la demi-droite des réels strictement positifs (dans le sens des abscisses croissantes).
- Plus généralement, quand $M(z = x + iy_0)$ décrit la droite horizontale $y = y_0$ (selon les x croissants), le point $M(\exp(z))$ décrit la demi-droite issue de O et d'angle polaire y_0 (en s'éloignant de O).

3.7.3 Résolution de l'équation $\mathrm{e}^z = a$ dans $\mathbb{C}$

Proposition 3.7.3
Soit $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ *un nombre complexe non nul, écrit sous forme trigonométrique* ($\rho = |a| > 0$).
Soit $z = x + iy$ *(avec* x, y *dans* $\mathbb{R}$*).*
On a les équivalences : $\exp(z) = a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \ln(\rho) \\ y \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$.
L'équation $\exp(z) = a$ *possède donc une infinité de solutions.*
Toutes se déduisent de l'une d'entre elles par ajout d'un multiple entier de $2i\pi$.

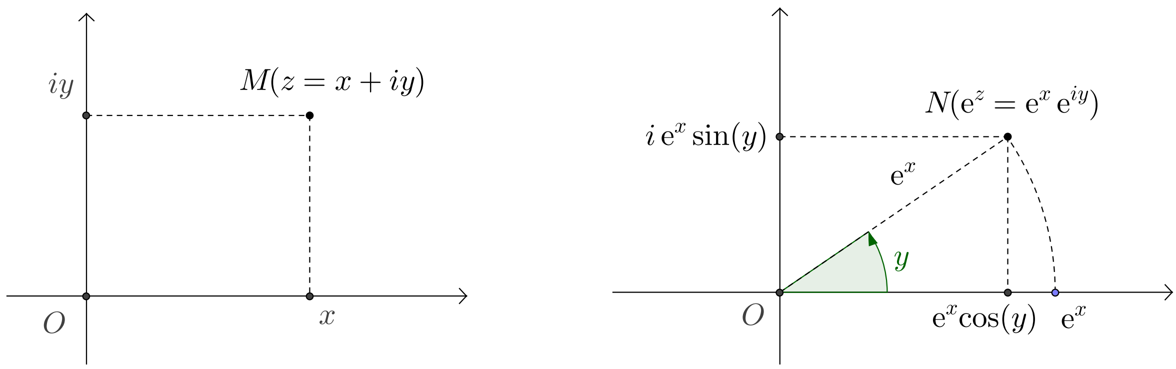
Remarques :

- L'équation $\exp(z) = a$ (a dans $\mathbb{C}^*$, et z cherché sous la forme $x + iy$) possède une solution unique si on se limite à y dans $]\,\alpha, \alpha + 2\pi]$ (par exemple y dans $]-\pi, \pi]$).
- On n'écrira **jamais** l'expression $\ln(a)$, quand a est un nombre complexe non réel strictement positif ! La raison principale est qu'il y a une infinité de solutions à l'équation $\mathrm{e}^z = a$, et qu'on n'a pas de raison objective et sûre de choisir l'une plutôt que l'autre.
- Par exemple, on a bien $\mathrm{e}^z = -1$ avec $z = i\pi$, mais ça n'autorise pas à écrire : $\ln(-1) = i\pi$. En effet, les solutions de $\mathrm{e}^z = -1$ sont les $z = (2k+1)i\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

De même, on a bien $e^z = i$ avec $z = i\dfrac{\pi}{2}$, mais ça n'autorise pas à écrire : $\ln(i) = i\dfrac{\pi}{2}$.

En effet, les solutions de $e^z = -1$ sont les $z = i\dfrac{\pi}{2} + 2ik\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

– La figure suivante illustre le passage de $M(z)$ à $N(e^z)$ (on n'a pas indiqué les unités sur les axes) :



$z \mapsto \exp(z)$

3.8 Interprétations géométriques

3.8.1 Module et argument de $(z-b)/(z-a)$

Dans cette sous-section, on désigne par A et B deux points distincts, d'affixes respectives a et b.

On note M un point quelconque du plan, distinct de A et B, d'affize z.

On s'intéresse à l'application $\varphi : z \mapsto \varphi(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, et à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Par commodité, on identifie φ avec la transformation $M(z) \mapsto N(\varphi(z))$ du plan complexe.

Proposition 3.8.1

Soient A, B, M trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives a, b, z.

Avec ces notations : $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \dfrac{AM}{BM}$ *et* $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}\right)\ [2\pi]$

En particulier : M est aligné avec A et B si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b}$ est un nombre réel.

De même : les droites (AM) et (BM) sont orthogonales si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur.

Ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k > 0$

– Si $k = 1$, cet ensemble est la médiatrice Δ du segment $[A; B]$.

– Si $0 < k < 1$, c'est un cercle centré sur (AB) et contenu dans le demi-plan défini par Δ et A.

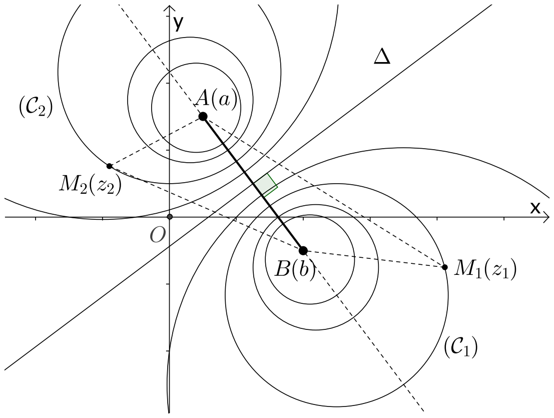
– Si $k > 1$, c'est un cercle centré sur (AB) et contenu dans le demi-plan défini par Δ et B.

Ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \theta\ [\pi]$

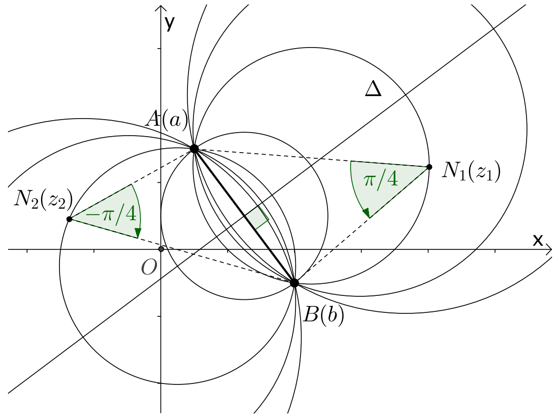
– Si $\theta = 0\ [\pi]$, cet ensemble est la droite (AB) (privée de A et B).

– Si $\theta \neq 0\ [\pi]$, c'est un cercle centré sur la médiatrice du segment $[A; B]$, privé de A et B.

– Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est le cercle de diamètre $[A;B]$, privé de A et B.
– Les cercles définis par θ et $-\theta$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite (AB).



Cercles définis par $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k > 0$



Cercles définis par $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \theta\ [2\pi]$

Équation de droite, condition d'alignement

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in (AB) \quad &\Leftrightarrow\ \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \frac{z-a}{z-b} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}} \ \Leftrightarrow\ (z-a)(\overline{z}-\overline{b}) = (z-b)(\overline{z}-\overline{a}) \\ &\Leftrightarrow\ z(\overline{a}-\overline{b}) - \overline{z}(a-b) = a\overline{b} - b\overline{a} \end{aligned}$$

Plus symétriquement : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}$ est réel.

Équation du cercle circonscrit au triangle ABC

On considère trois points distincts A, B, C, d'affixes respectives a, b, c.
Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) \quad &\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)\ [\pi] \ \Leftrightarrow\ \arg\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} = 0\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ (z-a)(\overline{z}-\overline{b})(c-b)(\overline{c}-\overline{a}) = (z-b)(\overline{z}-\overline{a})(\overline{c}-\overline{b})(c-a) \end{aligned}$$

Triangles équilatéraux

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(z)$ trois points du plan complexe.

On considère le triangle ABC du plan complexe. On a alors les équivalences :

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow$ $(a + jb + j^2c = 0$ ou $a + jc + j^2b = 0)$ $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

3.8.2 Similitudes directes

Proposition 3.8.2

Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul.

Soit f la transformation du plan complexe définie par $m(z) \to M(Z = az + b)$.

Si $a = 1$, f est la translation dont le vecteur est le vecteur image de b.

Si $a \neq 1$, l'application f possède un point invariant unique Ω, dont l'affixe est $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Si $a \neq 1$, l'application f est la composée commutative $f = r \circ h = h \circ r$ de :

- *la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ $[2\pi]$*
- *l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|a|$*

On dit alors que f est la similitude directe *de centre Ω, de rapport $|a|$, et d'angle $\arg(a)$ $[2\pi]$.*

NB : une translation est une similitude directe de rapport 1 et d'angle 0 $[2\pi]$ (pas de centre).

Cas particuliers de similitudes directes

Soit l'application $f : m(z) \mapsto M(Z = az + b)$. On rappelle que si $a = 1$, f est une translation.

On suppose donc $a \neq 1$, et soit $\Omega(\omega)$ le point fixe de f, avec $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

- Si a est réel, alors f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport a.

  Réciproquement, si $\Omega(\omega)$ est un point du plan, et si λ est un nombre réel, l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est définie par : $m(z) \mapsto M(Z) = \omega + \lambda(z - \omega)$.
- Si $a = e^{i\theta}$ (donc $|a| = 1$), f est la rotation de centre Ω et d'angle θ $[2\pi]$.

  Réciproquement, si $\Omega(\omega)$ est un point du plan, et si θ est un nombre réel, la rotation de centre Ω et d'angle θ $[2\pi]$ est définie par : $m(z) \mapsto M(Z) = \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$.
- Considérons par exemple l'application $m(z) \mapsto M(z' = f(z) = 2iz + 2 + i)$.

  C'est une similitude directe du plan complexe. On a $\omega = f(\omega) \Leftrightarrow \omega = i$.

  L'application f est la composée de la rotation r de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et de l'homothétie h de centre $\Omega(i)$ et de rapport $|2i| = 2$.

Multiplication des distances, conservation des angles

Soit f une similitude de rapport ρ.
Pour tous points $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, on a : $d(A', B') = |a|\, d(A, B)$.
L'application f multiplie donc les distances par le facteur $\rho = |a|$.

Pour tous points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, et $C' = f(C)$, on a : $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ $[2\pi]$
Ainsi les similitudes directes « conservent les mesures d'angles ».

Inverse et composées de similitudes directes

L'application $f : z \mapsto Z = az + b$ est bijective, et $f^{-1}(Z) = (Z - b)/a$. L'inverse d'une similitude directe (rapport ρ, angle θ) est donc une similitude directe (rapport $1/\rho$, angle $-\theta$).

Si f et g sont deux similitudes directes de rapport ρ et ρ' (et d'angles θ, θ'), alors $g \circ f$ est une similitude directe de rapport $\rho\rho'$ et d'angle $\theta + \theta'$.

Similitude directe définie par l'image d'un segment

Proposition 3.8.3 (Similitude directe définie par l'image d'un segment)
Soient A, B, A', B', quatre points du plan (avec $A \neq A'$ et $B \neq B'$) d'affixes respectives a, b, a', b'.

Il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
L'image du segment $[A; B]$ (resp. la droite (AB)) est alors le segment $[A', B']$ (resp. la droite $(A'B')$).
L'angle de la similitude directe f est égale à $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ $[2\pi]$, c'est-à-dire $\arg \dfrac{b'-a'}{b-a}$ $[2\pi]$.
Le rapport de la similitude f est $\dfrac{d(A', B')}{d(A, B)}$, c'est-à-dire $\left|\dfrac{b'-a'}{b-a}\right|$.

3.8.3 Symétries et projections orthogonales

Applications conservant l'alignement

On montre que les applications du plan complexe dans lui-même et qui « conservent l'alignement » (c'est-à-dire qui sont telles que, pour tous points alignés A, B, C les points $f(A), f(B), f(C)$ sont alignés) sont les applications $m(z) \mapsto M(Z) = uz + v\overline{z} + w$, avec (u, v, w) dans $\mathbb{C}^3$.

Bien sûr les similitudes directes (et parmi elles les translations et les homothéties), c'est-à-dire les applications $f : m(z) \mapsto M(Z = uz + w)$, en font partie. Mais il y en a d'autres, comme les symétries (ou les projections) orthogonales sur (par rapport à) une droite.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite

On sait que l'application $f : m(z) \mapsto M(Z = \overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.
De même, $f : m(z) \mapsto M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des imaginaires purs.

Plus généralement, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et d'angle polaire θ $[\pi]$.
Alors la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$ est donnée par $f : m(z) \mapsto M(Z) = \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z}$.

Plus généralement encore, soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $\Omega(\omega)$, d'angle polaire θ $[\pi]$.
Alors, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}'$ s'écrit $z \mapsto Z = \omega + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z-\omega} = \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z} + \omega - \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{\omega}$.

Projection orthogonale sur une droite

L'application $f : m(z) \mapsto M\Big(Z = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}\Big)$ est la projection orthogonale sur l'axe Ox.

De même, l'application $f : m(z) \mapsto M\Big(Z = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\Big)$ est la projection orthogonale sur Oy.

Plus généralement, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et d'angle polaire θ $[\pi]$.
Alors la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ est donnée par $f : m(z) \mapsto M(Z) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z}\Big)$.

Plus généralement encore, soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $\Omega(\omega)$, d'angle polaire θ $[\pi]$.

Alors, la projection orthogonale sur $\mathcal{D}'$ s'écrit $m(z) \mapsto (Z) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z}\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(\omega - \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{\omega}\Big)$.