Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

3.1 Notation cartésienne, conjugaison

Exercice 3.1.1 ($\star$)
Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ avec a et b réels :

$$z=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad u=\frac{1}{(1+2i)(3-i)} \qquad v=\frac{1+2i}{1-2i} \qquad w=\frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$$

Exercice 3.1.2 ($\star$)
A quelle condition $Z=z^2+z+1$ est-il réel ? Imaginaire pur ?

Exercice 3.1.3 ($\star\star$)
Résoudre le système $\begin{cases} iz-2\omega=-4+3i \\ 2\bar{\omega}+\bar{z}=3 \end{cases}$ dans $\mathbb{C}$.

3.2 Module et distance dans le plan complexe

■ Module d'un nombre complexe

Exercice 3.2.1 ($\star$)
Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leq 1$. Prouver que $\operatorname{Re}(z^2+4z+3)\geq 0$.

Exercice 3.2.2 ($\star\star$)
Pour tous a,b de $\mathbb{C}$, montrer que $1+|ab-1|\leqslant(1+|a-1|)(1+|b-1|)$.

Exercice 3.2.3 ($\star$)
Montrer que pour tous a,b de $\mathbb{C}$: $|a|+|b|\leqslant|a+b|+|a-b|$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 3.2.4 ($\star\star$)
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

Exercice 3.2.5 (💡💡✯)
Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ |1+a|+|a+b|+|b+c|+|c| \geqslant 1.$

Exercice 3.2.6 (✯)
Pour tout z de $\mathbb{C}$, avec $|z| \neq 1$, et tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Exercice 3.2.7 (✯✯✯✯)
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $(z_1,\ldots,z_n)$ de $\mathbb{C}^*$, montrer que $\dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|}{1+\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|z_k|}{1+|z_k|}$.

Exercice 3.2.8 (💡✯✯)

1. Montrer que pour tous a,b de $\mathbb{C}^*$, on a $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a|\cdot|b|}$.
2. Montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ |x|\cdot|y-z| \leqslant |y|\cdot|z-x|+|z|\cdot|x-y|$.
3. Montre l'inégalité dite *de Ptolémée* :
   $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4,\ |x-y|\cdot|z-w| \leqslant |x-z|\cdot|y-w|+|x-w|\cdot|y-z|$.

■ Module et argument

Exercice 3.2.9 (✯)
Du calcul de $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3.2.10 (✯)
Simplifier le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 3.2.11 (✯)
Module et argument de : $z = 1+\sqrt{2}\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 3.2.12 (✯)
Simplifier $z = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 3.2.13 (✯)
Trouver tous les n dans $\mathbb{Z}$ tels que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel.

Exercice 3.2.14 (✯)
Module et argument de $a = \dfrac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ et $b = \dfrac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

Exercice 3.2.15 (★★)

On suppose que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Module et argument des nombres complexes suivants :
$a = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $b = \sin\varphi + i(1 + \cos\varphi)$, $c = \cos\varphi + i(1 + \sin\varphi)$.

Exercice 3.2.16 (★)

Déterminer les complexes z tels que $|z| = |z-2|$ et $\arg z = \arg(z + 3 + i) \pmod{2\pi}$.

Exercice 3.2.17 (★)

Soit a dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $|z+a| = |z-a| \;\Leftrightarrow\; \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\; z = i\lambda a$.

Exercice 3.2.18 (★★)

Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

Exercice 3.2.19 (★★)

a, b, c, d étant des réels, résoudre $z + |z| = a + ib$, et $|z| - z = c + id$

Exercice 3.2.20 (★★)

Soit z tel que $|z| = 1$. Montrer qu'on a $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

■ Nombres complexes de module 1

Exercice 3.2.21 (★)

Soient u et v deux nombres complexes de module 1, tels que $uv \neq -1$.

Montrer que $Z = \dfrac{u+v}{1+uv}$ est un réel.

Exercice 3.2.22 (★★)

Avec $|a| = |b| = 1$, $a \neq b$, $z \in \mathbb{C}$, et $Z = \dfrac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b}$, montrer que Z^2 est réel négatif ou nul.

Exercice 3.2.23 (★★)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $\overline{a}b \neq 1$. Montrer que $(|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1) \;\Leftrightarrow\; \left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$.

Exercice 3.2.24 (★)

Déterminer les complexes z tels que les modules de z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

Exercice 3.2.25 (★)

Montrer que $\begin{cases} |z| = |z'| = 1 \\ |2 + zz'| = 1 \end{cases} \Rightarrow zz' = -1.$

Exercice 3.2.26 (💡 ★)
Soit x, y, z trois complexes de module 1. Comparer $|x+y+z|$ et $|xy+yz+zx|$.

Exercice 3.2.27 (★★★)
Soit a dans $\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$, et $\varphi_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
Montrer que $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ est invariant par φ_a.

Exercice 3.2.28 (💡 ★★)
Résoudre le système $\begin{cases} |x| = |y| = |z| = 1 \\ x+y+z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$

3.3 Trigonométrie circulaire

■ Cosinus, sinus

Exercice 3.3.1 (★★)
Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta$.

Exercice 3.3.2 (★★)
Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2 k\theta$.

Exercice 3.3.3 (★★★)
On se donne x_1, x_2, x_3 dans $[0, \pi]$, tels que $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$. On pose $S = \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \sin^2 x_3$.

1. Montrer que $S = -\cos^2 x_1 + \cos(x_2 - x_3)\cos x_1 + 2$.
2. En déduire $S \leqslant \dfrac{9}{4}$, l'égalité ayant lieu $\Leftrightarrow\ x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3.3.4 (💡 ★★)
Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$. Montrer successivement que : $\sin a + \sin b \leqslant 2 \sin \dfrac{a+b}{2}$.
En déduire $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d \leqslant 4 \sin \dfrac{a+b+c+d}{4}$, et $\sin a + \sin b + \sin c \leqslant 3 \sin \dfrac{a+b+c}{3}$.

Exercice 3.3.5 (★)
Transformer $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$ en produit.

Exercice 3.3.6 (★★)
Calculer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$. En déduire l'expression de $\cos \dfrac{\pi}{10}$.

Exercice 3.3.7 (★★)

On se donne deux réels a et b positifs ou nuls tels que $a+b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $\sin^2 a + \sin^2 b \leqslant \sin^2(a+b)$ et préciser quand on a l'égalité.

Exercice 3.3.8 (★★★★)

Trouver le maximum de $\sin^2 x \sin 2x$ sur $[0,\pi]$. En déduire $\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x\right| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Exercice 3.3.9 (★★★)

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2x}{3^k}\right) = \frac{\sin x}{\sin\dfrac{x}{3^n}}$.

Exercice 3.3.10 (★★★)

Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, h \in\,]0,\pi[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$

Exercice 3.3.11 (★★)

Montrer que $\sin 3x = 4\sin x \,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ pour tout x.

Exercice 3.3.12 (💡★★)

Si $x+y+z=\pi$, montrer que $\sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y \cos z = \sin^2 z$.

Exercice 3.3.13 (💡💡★★)

Montrer que $P = \sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14} = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 3.3.14 (💡★★)

Résoudre l'équation $\cos^n x + \sin^n x = 1$, où n est un entier strictement positif.

Exercice 3.3.15 (★★)

Résoudre $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ sur le segment $[0,\pi]$.

Exercice 3.3.16 (★)

Transformer $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$ en produit.

Exercice 3.3.17 (★★★)

Simplifier l'expression $(2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)\cdots\big(2\cos(2^{n-1}x)-1\big)$.

Exercice 3.3.18 (★★)

Simplifier l'expression $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}$.

Exercice 3.3.19 (💡★★)
Résoudre l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$.

■ Avec utilisation de $\mathrm{e}^{i\theta}$

Exercice 3.3.20 (★★)
Simplifier $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb)$.

Exercice 3.3.21 (★★★)
Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^k \theta \, \cos k\theta$.

Exercice 3.3.22 (★★★)
Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{\cos^k \theta}$.

Exercice 3.3.23 (★★)
Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta)$.

■ Utilisation de la formule du binôme

Exercice 3.3.24 (★★)
Calculer $S = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots, \quad T = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots,$ et $U = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$

Exercice 3.3.25 (★★★)
Calculer les sommes $\begin{cases} S = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots \\ T = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots \end{cases}$ et $\begin{cases} U = \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \cdots \\ V = \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \cdots \end{cases}$

Exercice 3.3.26 (★)
Calculer la somme $\binom{n}{0} - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \cdots$

Exercice 3.3.27 (★★)
Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.

■ Utilisation du nombre j

Exercice 3.3.28 (★★★)

Soient a, b et c trois nombres complexes. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$

Comment choisir a, b, c pour que les solutions x, y, z soient réelles ?

Exercice 3.3.29 (★★★)

Soit $Z=(x+jy+j^2z)^3$, où x, y et z sont trois nombres complexes donnés.
Montrer que lorsqu'on permute x, y ou z, le nombre Z ne peut prendre que deux valeurs.
A quelle condition ces deux valeurs sont-elles égales ?

Exercice 3.3.30 (★)

Soient x, y, z trois nombres réels. Montrer que :

$$(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

3.4 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

■ Racines carrées

Exercice 3.4.1 (💡★★)

Soit u une racine carrée de zz'. Montrer que $|z|+|z'|=\left|\dfrac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\dfrac{z+z'}{2}-u\right|$.

Exercice 3.4.2 (★)

Calculer les racines carrées de $Z=4ab+2(a^2-b^2)i$ (avec a, b réels).

Exercice 3.4.3 (★)

Trouver les racines quatrièmes de $Z=-119+120i$.

■ Équation du second degré

Exercice 3.4.4 (★)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation (E) : $z^2-2iz+2-4i=0$.

Exercice 3.4.5 (★)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^3-i=6(z+i)$.

Exercice 3.4.6 (★)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice 3.4.7 (⋆⋆)

1. Soient a, b, c les racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$.
   Calculer a, b, c sachant que l'une d'elle est réelle.
2. Trouver l'isobarycentre du triangle de sommets $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$.

Exercice 3.4.8 (💡⋆⋆)

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus [-1,1],\ \exists\,!\, z \in \mathbb{C},\ x = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big), |z| > 1$.

Exercice 3.4.9 (💡⋆)

1. Résoudre $(E) : x^2 + 4x + 1 + i(3x+5) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. Résoudre $(E') : (x^2 + 4x + 1)^2 + (3x+5)^2 = 0$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire une factorisation de $(x^2 + 4x + 1)^2 + (3x+5)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3.5 Racines n-ièmes

Exercice 3.5.1 (⋆)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 3.5.2 (⋆⋆⋆)

Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.5.3 (⋆⋆⋆⋆)

Résoudre $(z+1)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$. En déduire $P_n = \sin a \cdot \sin\Big(a + \dfrac{\pi}{n}\Big) \cdots \sin\Big(a + \dfrac{n-1}{n}\,\pi\Big)$.

Exercice 3.5.4 (⋆⋆)

Soient $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité. Pour $p \in \mathbb{Z}$, calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$.

Exercice 3.5.5 (💡⋆⋆)

Montrer que $a = (3+4i)/5$ n'est une racine n-ième de l'unité pour aucun entier $n \geqslant 1$.

Exercice 3.5.6 (⋆⋆)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$.

Exercice 3.5.7 (⋆⋆⋆)

Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation (E) : $\Big(\dfrac{1-iz}{1+iz}\Big)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R})$.

Exercice 3.5.8 (⋆)

Résoudre l'équation $z^6 - 2z^3 \cos 3\theta + 1 = 0$.

Exercice 3.5.9 (💡★)
Résoudre $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.5.10 (★)
Calculer les racines cubiques de $Z = \dfrac{-1+i}{4}$ et montrer que l'une d'elles a une puissance 4-ième réelle.

Exercice 3.5.11 (★★)
Résoudre l'équation (E) $(z-1)^3 + (z-1)^2(z+1) + (z-1)(z+1)^2 + (z+1)^3 = 0$.

Exercice 3.5.12 (★★)
Résoudre (E) : $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.5.13 (★★★)
On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de $z^n = a$ (avec $|a| = 1$, $n \in \mathbb{N}$).
Montrer que les points images de $(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 3.5.14 (💡★)
Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2-\omega_k)$, où les ω_k sont les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 3.5.15 (★★)
Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, avec n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.5.16 (★★)
Résoudre $(E) : 1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^k + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 3.5.17 (★★★)
Résoudre $(E) : z^7 + \dbinom{7}{2} z^5 + \dbinom{7}{4} z^3 + \dbinom{7}{6} z = 0$.

3.6 Interprétations géométriques

■ Conditions d'alignement

Exercice 3.6.1 (★★)
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que les points $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^4)$ soient alignés.

Exercice 3.6.2 (★★)
Montrer que $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} \in \mathbb{R}$.

■ Configurations géométriques

Exercice 3.6.3 (★★★)
Trouver la condition nécessaire et suffisante sur les complexes p et q pour que les points images des racines de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ forment un triangle rectangle isocèle.

Exercice 3.6.4 (★)
Condition nécessaire et suffisante spour que les points $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ forment un triangle isocèle.

Exercice 3.6.5 (★★)
Chercher une condition nécessaire et suffisante pour que les points $M(u)$ et $N(v)$ soient symétriques par rapport à la droite passant par $A(a)$ et d'angle polaire $\alpha \pmod{\pi}$.

Exercice 3.6.6 (💡★★)
Soit $ABCD$ un quadrilatère.

À partir de chaque coté, et vers l'extérieur, on construit un triangle rectangle isocèle.

Montrer que les diagonales du quadrilatère obtenu sont orthogonales et de même longueur.

Exercice 3.6.7 (💡★★★)
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'orthocentre du triangle de sommets $A(z)$, $B(z^2)$ $C(z^3)$ soit à l'origine.

Exercice 3.6.8 (💡★★)
Déterminer une CNS pour que $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 3.6.9 (★)
Condition nécessaire et suffisante sur z pour que $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ forment un triangle équilatéral ?

Exercice 3.6.10 (💡★★)
Trouver la condition nécessaire et suffisante sur les complexes a, b, c pour que les points images des racines de l'équation $z^4 + az^2 + bz + c = 0$ forment un carré.

■ Transformations du plan complexe

Exercice 3.6.11 (★★)
Identifier les transformations $m(z) \mapsto M(Z)$ du plan complexe définies par :

1. $Z = (1+i)z + 2 - i$
2. $Z = (-3+4i)\bar{z} + 12 + 6i$
3. $Z = i\bar{z} + 1$

Exercice 3.6.12 (★★)
Quelle est l'image du cercle $|z-1| = 1$ par la transformation $m(z) \mapsto M\Big(Z = \dfrac{z}{2-z}\Big)$?