Chapitre 11

Structures algébriques

11.1 Lois de composition

Exercice 11.1.1

Soit E un ensemble muni de deux lois $\star$ et $\bullet$

On suppose que e est neutre pour la loi $\star$ et que f est neutre pour la loi $\bullet$

On suppose enfin que : $\forall\,(x,y,u,v)\in E^4,\ (x\star y)\bullet(u\star v)=(x\bullet u)\star(y\bullet v)$

1. Montrer que $e=f$.
2. Prouver que les lois $\star$ et $\bullet$ sont identiques.
3. Montrer que cette loi est commutative et associative.

Exercice 11.1.2

Sur $\mathbb{R}$ on définit la loi $\star$ par : $x\star y=kxy+k'(x+y)$, où k et k' sont deux réels.

A quelle condition sur k et k' cette loi est-elle associative ?

Exercice 11.1.3

Etudier la loi $\star$, définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\begin{cases}\text{Si } A\cap B=\emptyset, \text{ alors } A\star B=A\cup B\\ \text{Si } A\cap B\neq\emptyset, \text{ alors } A\star B=E\end{cases}$

Exercice 11.1.4

Etudier la loi $\star$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\star B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Exercice 11.1.5

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition associative notée $\star$

On suppose également que E possède un neutre e pour la loi $\star$

1. Montrer que si un élément a de E est régulier (simplifiable) alors il est inversible.
2. Vérifier sur un exemple que ce n'est plus vrai si on ne suppose pas que E est fini.

Exercice 11.1.6

Soit E un ensemble muni d'une loi associative notée multiplicativement.

Pour tout a de E, on note $aEa=\{axa, x\in E\}$.

On suppose : $\exists\, a\in E,\ aEa=E$. Montrer que E possède un élément neutre.

Exercice 11.1.7

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition $\star$

On suppose qu'il existe deux éléments a et b dans E tels que, pour tous x, y :

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } a \text{ est régulier à gauche)} \\ x \star b = y \star b \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } b \text{ est régulier à droite)} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe e et f dans E tels que $a \star e = a$ et $f \star b = b$.
2. Montrer que pour tout x de E, $e \star x = x$ et $x \star f = x$.
3. Montrer que $e = f$, et que cet élément est neutre pour la loi $\star$.

Exercice 11.1.8

Sur l'ensemble de toutes les relations binaires sur E on définit la loi $\star$ par :

Pour toutes relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$ est définie par $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists\, z \in E, x\,\mathcal{R}\,z$ et $z\mathcal{S}y$.

Montrer que la loi $\star$ est associative.

Exercice 11.1.9

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $x \star y = x + y + \sin(xy)$.

1. Cette loi est-elle commutative ? Existe-t-il un élément neutre ?
2. Montrer qu'il existe des éléments de $\mathbb{R}$ admettant plusieurs inverses.
3. En déduire que $\star$ n'est pas associative.

Exercice 11.1.10

Combien y-a-t-il de lois de composition sur un ensemble à n éléments ?

Combien de ces lois sont-elles commutatives ?

Exercice 11.1.11

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\star$, associative et commutative.

On suppose de plus que pour tout x de E, $x \star x = x$.

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \star y = y$ définit une relation d'ordre sur E.
3. Montrer alors que pour tous éléments x, y de E, $\sup\{x, y\} = x \star y$.

Exercice 11.1.12

Soit $(E, \leqslant)$ muni d'une loi $\star$ telle que : $\forall\,(a, b, x) \in E^3$, $\begin{cases} a \star b \leqslant a, \quad a \star b \leqslant b \\ (x \leqslant a) \text{ et } (x \leqslant b) \Rightarrow x \leqslant a \star b \end{cases}$

1. Montrer que la loi $\star$ est commutative.
2. Prouver que pour tout a de E, $a \star a = a$.
3. Vérifier que $\begin{cases} a \leqslant b \Rightarrow a \star c \leqslant b \star c \\ (a \leqslant b) \text{ et } (c \leqslant d) \Rightarrow a \star c \leqslant b \star d \end{cases}$
4. Montrer que la loi $\star$ est associative.

Exercice 11.1.13

Soit E un ensemble muni d'une loi $\star$ associative. Pour tout a de E, on définit les applications g_a et d_a de E dans E : $\forall\, x \in E$, $d_a(x) = x \star a$ et $g_a(x) = a \star x$.

1. Montrer que s'il existe a dans E tel que g_a et d_a soient surjectives, alors E possède un élément neutre pour la loi $\star$.
2. Montrer que si pour tout a de E les applications g_a et d_a sont surjectives, alors tout élément de E possède un inverse pour la loi $\star$.

Exercice 11.1.14

Soit E un ensemble fini muni d'une loi associative, notée multiplicativement.

Montrer que pour tout a de E, il existe un entier m tel que $x = a^m$ soit idempotent ($x^2 = x$).

11.2 Groupes et sous-groupes

Exercice 11.2.1

Soient x, y deux éléments d'un groupe G tels que : $(xy)^{-1} = x^{-1}y$ et $(yx)^{-1} = y^{-1}x$.

Montrer que $(x^2)^{-1} = y^2$ et $x^4 = y^4 = e$.

Exercice 11.2.2

Soit G un groupe. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme (c'est-à-dire vérifie $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$) si et seulement si la loi de G est commutative.

Exercice 11.2.3

Soit $(G, \star)$ un groupe abélien (on note e le neutre et a' le symétrique de a).

Soit α un élément de G, différent de e.

On définit une loi T en posant : $\forall\, a, b \in G$, $a \,\mathrm{T}\, b = a \star b \star \alpha$.

Montrer que (G, T) est un groupe abélien.

Exercice 11.2.4

Montrer que $\mathbb{R}$, muni de la loi $x \star y = (x^3 + y^3)^{1/3}$ est un groupe.

Exercice 11.2.5

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :

$\forall\, (a, b) \in G^2$, $\exists\, (x, y) \in G^2$, $b = ax = ya$.

Montrer que G est un groupe.

Exercice 11.2.6

Soit G un groupe. Pour tout a de G on pose $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Montrer que φ_a est un *automorphisme* de G (c'est-à-dire une application bijective de G dans lui-même telle que $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)\varphi_b(y)$).

Montrer que l'application $\varphi \colon a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme (c'est-à-dire vérifie $\varphi_{ab} = \varphi_a\varphi_b$) de groupe de G dans le groupe des automorphismes de G. Quel en est le noyau ?

Exercice 11.2.7

Soit G un groupe fini d'ordre n. Soit k un entier premier avec n.
Montrer que l'application $x \to x^k$ est une bijection de G sur lui-même.

Exercice 11.2.8

Montrer que tout groupe d'ordre 4 est commutatif.

Exercice 11.2.9

La table suivante définit-elle un groupe ?

$\star$	e	x	y	z	t
e	e	x	y	z	t
x	x	e	t	y	z
y	y	z	e	t	x
z	z	t	x	e	y
t	t	y	z	x	e

Exercice 11.2.10

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $a^5 = e$ et $ab = ba^3$.
Montrer que $a^2b = ba$ et que $ab^3 = b^3a^2$.

Exercice 11.2.11

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi multiplicative telle que :
$\forall\, a, b, c : a^2 = b^2, \quad ab^2 = a, \quad a^2(bc) = cb, \quad (ac)(bc) = ab.$
Montrer que E est un groupe pour la loi $\star$ définie par : $a \star b = ab^3$.
Enoncer et prouver une réciproque.

Exercice 11.2.12

On définit la loi $\star$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $x \star y = x + y - xy$.

1. Etudier la loi $\star$. $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe ?
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ est un groupe abélien « isomorphe » à $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, calculer $x^{(n)} = x \star x \star \cdots \star x$ (n fois).

Exercice 11.2.13

Montrer que $]-1, 1[$, muni de la loi $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, est un groupe abélien.

Exercice 11.2.14

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $b^6 = e$, $ab = b^4a$.
Montrer que $b^3 = e$ et que $ab = ba$.

Exercice 11.2.15

Soit G un groupe, et n dans $\mathbb{N}$.
On suppose que $\varphi : x \mapsto x^n$ est un morphisme de G (c'est-à-dire vérifie $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$).
Montrer que pour tout x de G, x^{n-1} commute avec tous les éléments de G.

Exercice 11.2.16

Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative.

On suppose que tout élément de G est régulier (simplifiable).

Montrer que G est un groupe.

Exercice 11.2.17

Montrer qu'un groupe fini d'ordre premier est cyclique.

Exercice 11.2.18

Montrer qu'un groupe G dans lequel tout x vérifie $x^2 = e$ est commutatif.

Exercice 11.2.19

Montrer qu'un groupe G dans lequel on a toujours $(xy)^2 = x^2y^2$ est commutatif.

Exercice 11.2.20

Soit G un groupe fini dans lequel tout élément vérifie $x^2 = e$.

1. Montrer que le groupe G est abélien
2. On fixe un élément a de G, distinct du neutre e.
   Pour tout x de G, on note $\overline{x} = \{x, ax\}$.
   On définit ensuite une relation $\mathcal{R}$ sur G en posant $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow y \in \overline{x}$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. On note H l'ensemble des différentes classes d'équivalences $\overline{x}$, quand x parcourt G.
   Quel est le cardinal de H ?
4. Montrer qu'on définit une loi de groupe sur H en posant $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xy}$.
   Vérifier que H satisfait à la même hypothèse que le groupe G.
5. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.

Exercice 11.2.21

Soit G un ensemble muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :

$$\begin{cases} \text{Il existe un élément } e \text{ de } E \text{ tel que pour tout } x,\ xe = x \\ \text{Pour tout } x \text{ de } E, \text{ il existe un élément } x' \text{ tel que } xx' = e. \end{cases}$$

Montrer que G est un groupe.

Exercice 11.2.22

Soit G un groupe. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que :

$\forall\, i \in \{k, k+1, k+2\}$, $\forall\, a, b \in G$, $(ab)^i = a^i b^i$.

Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 11.2.23

Soit G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable.

Montrer que H est un sous-groupe de G.

© Jean-Michel Ferrard

Exercice 11.2.24

On considère les applications de $\mathbb{R} - \{0,1\}$ dans lui-même, définies par :

$$\begin{cases} f_1(x) = x & f_2(x) = \dfrac{1}{1-x} & f_3(x) = \dfrac{x-1}{x} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x} & f_5(x) = 1 - x & f_6(x) = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

1. Montrer que ces six applications forment un groupe G pour la loi $\circ$.
2. Quels sont les sous-groupes de G ?

Exercice 11.2.25

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.

Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 11.2.26

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.

On note $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ et pareillement $KH = \{kh, k \in K, h \in H\}$.

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 11.2.27

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-groupes d'un groupe G.

On suppose que pour tous indices i et j il existe un indice k tel que $H_i \cup H_j \subset H_k$.

Montrer que $H = \bigcup H_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 11.2.28

Soit G un groupe fini d'ordre $2n$, avec $n \geqslant 2$.

On suppose qu'il existe deux sous-groupes H et K d'ordre n, tels que $H \cap K = \{e\}$.

Montrer que $n = 2$ et donner la table du groupe G.

11.3 Structures d'anneau et de corps

Exercice 11.3.1

Soit A un anneau et $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$ (on dit que C est le *centre* de A).

Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 11.3.2

Dans l'anneau A, on suppose que : $\forall\,(a,b) \in A^2,\ (a^2 - a)b = b(a^2 - a)$.

1. Montrer que $\forall\,(x,y,z) \in A^3, (xy + yx)z = z(xy + yx)$.
2. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 11.3.3

Soit A un anneau sans élément nilpotent (autre que 0).

Soit a un élément idempotent de A (c'est-à-dire tel que $a^2 = a$).
Montrer que a commute avec tout élément de A.

Exercice 11.3.4

Soit A un anneau dans lequel, pour tout élément x, $x^2 = x$. *(Anneau de Boole)*

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que pour tout a de A, $2a = 0$. En déduire que A est commutatif.
3. Montrer que A ne peut pas se réduire à trois éléments.
4. On suppose que A est fini et de cardinal supérieur à 2.
   Montrer que A possède des diviseurs de zéro (Considérer $xy(x+y)$).
5. Montrer que si $\operatorname{card}(A) = 4$, alors A est unique à un isomorphisme près.
6. Montrer que si A est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 11.3.5

Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

Exercice 11.3.6

Soit x un élément nilpotent d'un anneau A.
Montrer que $1 - x$ est inversible et donner son inverse en fonction de x.

Exercice 11.3.7

Soit $A = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.

Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de A, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.

2. Montrer que pour tous x, y de A, $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que x est inversible dans A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
4. Montrer que les éléments $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ de A sont inversibles.
5. Réciproquement, on veut montrer que tout inversible x de A est de la forme précédente
   (a) Montrer qu'on peut se ramener à supposer $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer alors que x est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure.
   Indication : si $b \geqslant 1$, considérer $x_1 = \dfrac{x}{1 + \sqrt{2}}$.