Problème

Première partie : sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Les ensembles $a\mathbb{Z}$ sont de manière évidente des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.
Dans cette partie, on désigne par G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$.
On va montrer que soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ (avec $a > 0$) soit G est une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ est non vide. Justifier l'existence de $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+}$. [S]
2. On suppose ici que a est strictement positif.
   (a) Montrer que a est élément de G (indication : raisonner par l'absurde, considérer l'intervalle $]a, 2a[$ et utiliser deux fois la caractérisation de la borne inférieure). [S]
   (b) Montrer que G est inclus dans $a\mathbb{Z}$ (indication : pour tout x de G, justifier l'existence d'un k de $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant x - ka < a$). En déduire que $G = a\mathbb{Z}$ (G est dit *discret*). [S]
3. Dans cette question, on suppose que a est nul.
   Montrer que pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe z dans G tel que $x < z < y$.
   (Indication : utiliser, après avoir justifié son existence, un élément t de $G \cap]0, y-x[$).
   Une récurrence immédiate montre que $]x, y[$ contient une infinité d'éléments de G.
   On exprime cette situation en disant que G est dense *dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas bien sûr des ensembles $a\mathbb{Z}$. On a donc prouvé que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets (parmi eux, le groupe trivial $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ est le seul qui soit fini), soit denses dans $\mathbb{R}$.* [S]

Deuxième partie : morphismes croissants d'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$

Dans cette partie, G désigne un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
On se propose de caractériser les morphismes croissants de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire les applications $f : G \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $(x \Rightarrow y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$.
Il est clair que pour tout réel λ, l'application $t \mapsto \lambda t$ est un morphisme de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, croissant si $\lambda \geqslant 0$, décroissant si $\lambda \leqslant 0$.

1. On suppose dans cette question que G est un sous-groupe *discret* de $(\mathbb{R},+)$.
   Soit g un morphisme de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
   Montrer qu'il existe un réel λ tel que, pour tout t de G, $g(t) = \lambda t$.
   Les morphismes croissants de G dans $\mathbb{R}$ sont donc les applications $t \mapsto \lambda t$, où $\lambda \geqslant 0$. [S]

Dans la suite de cette partie, G est un sous-groupe *dense* de $(\mathbb{R},+)$.
Soit g un morphisme croissant de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sup\{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, x]\}$.

2. Justifier l'existence de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Montrer que f est croissante, et qu'elle est un prolongement de l'application g. [S]
3. Dans cette question, on se donne un réel strictement positif ε.
   (a) Montrer qu'il existe x, y dans G tels que $x < y$ et $0 \leqslant g(y) - g(x) \leqslant \varepsilon$.
   Indication : utiliser la densité de G dans $[0, a]$, avec a donné dans $G \cap \mathbb{R}^{+*}$. [S]
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $t \in G \cap [-\alpha, \alpha] \Rightarrow |g(t)| \leqslant \varepsilon$. [S]
   (c) Prouver alors que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, |y - x| \leqslant \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Indication : si $x \leqslant y$ encadrer judicieusement $[x, y]$ par deux éléments de G. [S]
4. (a) Montrer que f est un endomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R},+)$. [S]
   (b) En déduire $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x (supposer $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$). [S]
5. Déduire de ce qui précède les morphismes croissants de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$. [S]

Corrigé

Première partie

1. Soi x un élément non nul de G (possible car G n'est pas réduit à $\{0\}$).
   On sait que $-x$ est dans G. Donc $|x|$ est dans $G \cap \mathbb{R}^{+*}$.
   L'ensemble $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ étant une partie minorée (par 0) et non vide de $\mathbb{R}$, possède une borne inférieure a (et a est un élément de $\mathbb{R}^{+}$). [Q]

2. Dans cette question, on suppose que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*}) > 0$.
   (a) Supposons que a ne soit pas dans G.
   Il existe alors b dans $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a < b < 2a$ (caractérisation de la borne inférieure).
   De même, il existe c dans $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a < c < b$. Ainsi $0 < b - c < a$.
   Mais $b - c$ est un élément de G, ce qui contredit la définition de a.
   Cette contradiction montre que a (supposé ici > 0) est dans G. [Q]
   (b) Soit x un élément quelconque de G, et soit k la partie entière de $\frac{x}{a}$.
   On a alors $k \leqslant \frac{x}{a} < k+1$ donc $0 \leqslant x - ka < a$.
   Mais a est dans G et k est dans $\mathbb{Z}$, donc ka est dans G.
   On en déduit que $x - ka$ est dans $G \cap [0, a[$ donc $x - ka = 0$ (définition de a).
   Ainsi x est un élément de $\mathbb{Z}a$, ce qui prouve l'inclusion $G \subset \mathbb{Z}a$.
   L'inclusion $\mathbb{Z}a \subset G$ est évidente (car a est un élément du groupe $(G, +)$).
   Il en résulte l'égalité $G = a\mathbb{Z}$. [Q]

3. Dans cette question, on suppose que $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*} = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un élement t de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $0 < x < \varepsilon$ (caractérisation de la borne inférieure).
   En particulier si on se donne $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe t dans G tel que $0 < t < y - x$.
   Posons alors $k = E(\frac{x}{t}) + 1$. On a $k - 1 \leqslant \frac{x}{t} < k$ donc $x < kt \leqslant x + t < y$.
   Mais t est dans G et k est dans $\mathbb{Z}$ donc $z = kt$ est dans G.
   On a ainsi trouvé un élément z de G vérifiant la double inégalité $x < z < y$. [Q]

Deuxième partie

1. On sait qu'il existe a dans $\mathbb{R}^{+}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.
   Si $a = 0$ (donc $G = \{0\}$) le seul morphisme de G dans $\mathbb{R}$ est l'application qui au seul élément 0 de G associe 0 dans $\mathbb{R}$. Elle est évidemment du type $t \mapsto \lambda t$ avec $\lambda \geqslant 0$.

   On suppose donc $a > 0$. Posons $\mu = g(a)$ ($\mu \geqslant 0$ car $g(0) = 0$ et g est croissante).
   Tout élément t de G s'écrit $t = ka$, avec k dans $\mathbb{Z}$.
   On a alors $g(t) = g(ka) = kg(a)$ (car g est un morphisme).
   Il en résulte $g(t) = k\mu = \lambda t$ avec $\lambda = \frac{\mu}{a} \geqslant 0$.
   Conclusion : si G est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$, les morphismes croissants de G dans $\mathbb{R}$ sont les applications $t \mapsto \lambda t$ avec $\lambda \geqslant 0$. [Q]

2. Soit x un réel, et soit a un élément de G, avec $a \geqslant x$ (possible car G est dense).
   Pour tout t de $G \cap]-\infty, x]$, on a $t \leqslant a$ donc $g(t) \leqslant g(a)$ car g est croissante.
   Il en résulte que l'ensemble non vide $\{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, x]\}$ est majoré, ce qui assure de l'existence du réel $f(x)$ (et de plus $f(x) \leqslant g(a)$).

Soient x, y dans $\mathbb{R}$, avec $x \leqslant y$.
On a bien sûr l'inclusion $\{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, x]\} \subset \{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, y]\}$.
Par passage à la borne sup, on en déduit $f(x) \leqslant f(y)$: f est donc croissante.

Soit x un élément de G. Le réel $g(x)$ est le maximum de $\{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, x]\}$.
Il en résulte $f(x) = g(x)$: l'application f est donc un prolongement de g. [Q]

3. (a) Soit $a > 0$ dans G. On sait que G est dense dans $\mathbb{R}$.
En particulier, il existe une infinité d'éléments de G dans le segment $[0, a]$.
Soit $n \geqslant 1$, et $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$, avec les x_k dans G.
On a $g(a) = g(1) - g(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k))$.
Les n termes de la somme sont positifs ou nuls (car g est croissante), et l'un d'eux au moins est inférieur ou égal à $\frac{g(a)}{n}$ (sans quoi la somme excèderait $g(a)$).
Si on choisit n assez grand pour que $n\varepsilon \geqslant g(a)$ on a donc trouvé deux éléments $x = x_k$ et $y = x_{k+1}$ de $[0, a]$ tels que $x < y$ et $0 \leqslant g(y) - g(x) \leqslant \varepsilon$. [Q]

(b) On pose $\alpha = y - x$. D'après ce qui précède, $0 \leqslant g(\alpha) = g(y) - g(x) \leqslant \varepsilon$.
Dans ces conditions (compte tenu de $g(-\alpha) = -g(\alpha)$ et la croissance de g) on voit que, pour tout t de G : $-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha \Rightarrow |g(t)| \leqslant g(\alpha) \leqslant \varepsilon$. [Q]

(c) On suppose par exemple $0 \leqslant y - x \leqslant \frac{\alpha}{2}$.
Par densité, il existe t, t' dans G tels que $x - \frac{\alpha}{4} \leqslant t \leqslant x \leqslant y \leqslant t' \leqslant y + \frac{\alpha}{4}$.
La croissance de f donne alors $f(t) \leqslant f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(t')$.
Ainsi $|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \leqslant f(t') - f(t) = g(t') - g(t) = g(t' - t)$.
Par construction, on a $|t' - t| \leqslant y - x + \frac{\alpha}{2} \leqslant \alpha$.
On en déduit $|g(t' - t)| \leqslant \varepsilon$ donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. [Q]

4. (a) La question précédente montre que f est uniformément continue, donc continue.
Il reste à montrer que f est un endormorphisme de $(\mathbb{R}, +)$.
Pour cela on se donne x, y dans $\mathbb{R}$, et il faut prouver que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Puisque G est dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ de G qui converge vers x.
De même, il existe une suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ de G qui converge vers y.
La suite $(r_n + s_n)_{n\geqslant 0}$ (dont les éléments sont dans G) converge donc vers $x + y$.
Pour tout n, on a $g(r_n + s_n) = g(r_n) + g(s_n)$ c'est-à-dire $f(r_n + s_n) = f(r_n) + f(s_n)$.
f étant continue, on en déduit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ par passage à la limite. [Q]

(b) Pour tout x de $\mathbb{Z}$, on a $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1)$ car f est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$.
Supposons $x = \frac{p}{q}$, avec p, q dans $\mathbb{Z}$.
On a alors $qf(x) = f(q \cdot x) = f(p) = pf(1)$ donc $f(x) = xf(1)$.
Soit x un réel, et $(r_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de rationnels convergeant vers x.
On a $\forall n, f(r_n) = r_n f(1)$, donc $f(x) = xf(1)$ quand $n \to \infty$ (f est continue). [Q]

5. Avec les notations précédentes, et pour tout t de G, on a $g(t) = \lambda t$ avec $\lambda = f(1) \geqslant 0$.
Conclusion finale : les morphismes croissants de $(G, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ sont les applications $t \mapsto \lambda t$ avec λ dans $\mathbb{R}^+$ (et ce quelque soit le sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$). [Q]